ДИМИТЪР МЪРВАКОВ / ВИКТОР ИВАНОВ

СБОРНИК ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКА

ЗА

9.–10.

КЛАС

ПРОСВЕТА

ДИМИТЪР МЪРВАКОВ / ВИКТОР ИВАНОВ

СБОРНИК ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКА

ЗА

9.–10.

КЛАС

60 години заедно

ПРОСВЕТА
СОФИЯ

* задачи от профилирана подготовка

** задачи за състезания, конкурси и олимпиади

ISBN 954–01–1805–0

СЪДЪРЖАНИЕ

4. ДВИЖЕНИЕ И ЕНЕРГИЯ

УВОД

Сборникът е написан в съответствие с действащите учебни програми по физика и астрономия за 9. клас (задължителна и профилирана подготовка) и 10. клас (задължителна подготовка). Той включва задачи от ядрата на учебно съдържание „Електричество и магнетизъм“, „Трептения и вълни“, „Светлина“ и „Механика“. Нивото на задачите е подбрано така, че сборникът да подпомага учениците при по-задълбоченото овладяване на материала. Предполага се, че те ще пристъпят към използването му, след като съответният материал от учебниците заедно с типичните примери в тях и задачите за самостоятелна работа са изучени. При написването на сборника авторите са се ръководели от схващането, че самостоятелната работа на учениците води до изграждане на навици, знания и умения, които на по-късен етап могат да се окажат съществени в развитието им. Основният акцент е в посока на изграждане на ясно физично мислене, което в съчетание с прилична математическа култура е нужно на всеки образован съвременен човек.

Организацията на отделните тематични единици има за цел да даде възможност на учениците сами или с помощта на своя учител да се научат как трябва да подхождат при решаването на даден физичен проблем, какви математични средства да прилагат при решаването му, как да представят получените от тях резултати, какви изводи и обобщения могат да направят, за да изградят своята физична интуиция. Затова всяка тематична единица в сборника включва кратки теоретични бележки, в които са отбелязани основните понятия, физични величини и закони в дадената област. Специално внимание е обърнато на условията за приложимост на физичните закони. Трябва винаги да се помни, че използването на даден физичен закон извън неговата област на приложимост води до получаването на грешни резултати и невярно описание на съответната ситуация.

Важна част от всяка тематична единица са също подробно решените примери. Чрез тях в явен вид е показана цялата последователност от действия, която се изисква за решаването на определена физична задача. Според авторите учениците би следвало да се придържат към следните правила.

1. Нужно е внимателно запознаване с текста на задачата и изясняване на описаната в условието ситуация. Това означава разграничаване на величините, зададени в явен вид, от тези, които неявно се споменават в условието, и от тези, които се търсят. Обикновено графичното представяне (фигури, схеми, графики – със съответните означения) помага съществено при решаването на задачата.

2. На следващия етап трябва да се изясни кои физични закони и зависимости свързват въведените физични величини и да се запишат съответните уравнения. Един добър подход в този случай е да се тръгне от съотношенията, в които участват търсените величини, и последователно да се използват всички условия, водещи до записването на пълна система от уравнения. Важно правило е, че в уравненията физичните величини участват в най-общ вид – чрез буквените си означения, а не чрез конкретните си числени стойности.

3. Третият етап е математически. Трябва да се реши съответното уравнение или система от уравнения. При получаването на решенията винаги трябва да се отчита, че е възможно математическата задача да има решение, което няма физичен смисъл, и затова е необходимо допълнително изследване.

4. В повечето задачи решението трябва да се запише в числен вид. Винаги трябва да се изхожда от факта, че физичните величини са зададени с определена точност. При записване на окончателния резултат след десетичната запетая трябва да се оставят толкова знака, колкото е минималният брой значещи цифри на зададените в условието величини.

Третата група във всяка тематична единица са задачите за самостоятелна работа. Обикновено те са варианти (с известни усложнения) на решените примери. Затова на задачите са дадени само отговорите, а на някои по-сложни – и решение.

Сборникът има приложения, включващи основните физични константи, а така също и стойностите на различни физични характеристики. Той може да се използва в съчетание с всеки одобрен от МОН учебник за 9. и 10. клас.

1. ЕЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗЪМ

ЕЛЕКТРОСТАТИКА

Електростатично взаимодействие

Свойството на телата да участват в електрични взаимодействия се определя от физичната величина **електричен заряд**. Съществуват два вида електрични заряди – положителни и отрицателни. Минималната възможна стойност на заряда се нарича **елементарен електричен заряд** и е равна на

$$e = 1{,}6.10^{-19}\ \text{C}.$$

Материален носител на елементарния отрицателен заряд е електронът, а на елементарния положителен заряд – протонът. Всеки атом съдържа равен брой протони и електрони, които се определят от поредния номер на елемента. Броят на градивните частици в 1 mol от дадено вещество се задава от числото на Авогадро

$$N_A = 6{,}02.10^{23}\ \text{mol}^{-1}.$$

Електричният заряд на дадено тяло се определя от некомпенсираните елементарни заряди. При определяне на броя им се използват величини като моларна маса μ (масата на един мол вещество) и плътността ρ, които се взимат от Периодичната система и от таблици.

Електростатичното поле се създава от неподвижни заряди. При всички явления в изолирана система, свързани с преразпределението на електричните заряди, е в сила **законът за запазване на електричния заряд**

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = \text{const}.$$

Между всеки два точкови заряда действа Кулонова сила, чиято големина е

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2},$$

където $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\ \dfrac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$, а електричната константа $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ \dfrac{\text{C}^2}{\text{N.m}^2}$. Тя е насочена по съединителната права между зарядите и е сила на отблъскване при едноименни заряди и сила на привличане при разноименни заряди. Силата на взаимодействие между два заряда не зависи от наличието на други заряди в пространството около тях. Например при взаимодействие на три заряда силата, действаща на всеки един от тях, е векторна сума на Кулоновите сили, с които му действат другите два заряда. Тя се определя по правилото на успоредника. Това твърдение се нарича **принцип на суперпозицията** и заедно със **закона на Кулон** са основните закони в електростатиката.

ПРИМЕРИ

1.1. Какъв заряд би имало медно (Cu) топче с радиус 1 cm, ако се отстранят всичките му валентни електрони?

Дадено: $R = 1$ cm
Да се намери: Q
Решение

При отстраняване на валентните електрони медното топче ще се зареди положително, тъй като броят на протоните ще бъде по-голям от броя на електроните. Медта (Cu) е елемент от първа група на Периодичната система и следователно всеки атом има по един валентен електрон. Тогава зарядът на топчето ще бъде

$$Q = N\,e,$$

където N е броят на отделените валентни електрони, т.е. броят на медните атоми в топчето, а e – елементарният заряд.

За да определим N, ще използваме стандартни характеристики като моларна маса $\mu = 64\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ и плътност $\rho = 8{,}9\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Всеки mol вещество съдържа $N_A = 6{,}02.10^{23}$ mol^{-1} атома (или молекули). Ако означим с m масата на медното топче, а с m_0 – масата на един атом Cu, имаме

$$N = \frac{m}{m_0}.$$

Тъй като

$$m = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3,\quad m_0 = \frac{\mu}{N_A},$$

получаваме

$$N = \frac{4}{3}\frac{\pi R^3 \rho N_A}{\mu}.$$

Следователно

$$Q = \frac{4}{3}\frac{\pi R^3 \rho N_A e}{\mu} \approx 56.10^3\ \text{C} = 56\ \text{kC}.$$

Получената стойност за Q = 56 kC е много голяма. Във всички познати от практиката случаи наелектризираните метални тела получават заряди, по-малки от 1 mC. Това означава, че при наелектризирането само малка част от валентните електрони напускат метала.

1.2. Две еднакви по размери малки метални топчета със заряди съответно $q_1 = 6\ \mu$C и $q_2 = -12\ \mu$C се намират на определено разстояние едно от друго. Как ще се промени Кулоновата сила между тях, ако топчетата се допрат и след това се отдалечат на първоначалното разстояние?

Дадено: $q_1 = 6\ \mu$C, $q_2 = -12\ \mu$C

Да се намери: $\frac{F}{F'}$

Решение

Първоначалната Кулонова сила F е сила на привличане, тъй като зарядите са разноименни. По големина тази сила е

$$F = k\frac{q_1|q_2|}{r^2},$$

където r е разстоянието между зарядите. При допиране на топчетата общият им заряд е

$$Q = q_1 + q_2 = -6\ \mu\text{C}.$$

След разделянето им всяко едно от тях има заряд $q = \frac{Q}{2} = -3\ \mu\text{C}$, тъй като общият заряд се разпределя поравно между тях. Тогава Кулоновата сила променя посоката си и става сила на отблъскване, понеже зарядите са едноименни. По големина тази сила е

$$F' = k\frac{|q|^2}{r^2} = k\frac{(q_1+q_2)^2}{4r^2}.$$

Тогава

$$\frac{F'}{F} = \frac{(q_1+q_2)^2}{4q_1|q_2|} = \frac{(|q_2|-q_1)^2}{4q_1|q_2|} = \frac{1}{8}.$$

Полученият резултат дава възможност да се направят няколко обобщения.

1. Ако **зарядите q_1 и q_2 са едноименни**, след разделянето им зарядът $q = \frac{q_1+q_2}{2}$ на топчетата е със същия знак и посоката на Кулоновата сила не се променя. Тя остава сила на отблъскване. Тогава

$$\frac{F'}{F} = \frac{(q_1+q_2)^2}{4q_1q_2} > 1.$$

Наистина

$$(q_1+q_2)^2 > 4q_1q_2,$$

$$q_1^2 - 2q_1q_2 + q_2^2 > 0,$$

откъдето следва

$$(q_1-q_2)^2 > 0,$$

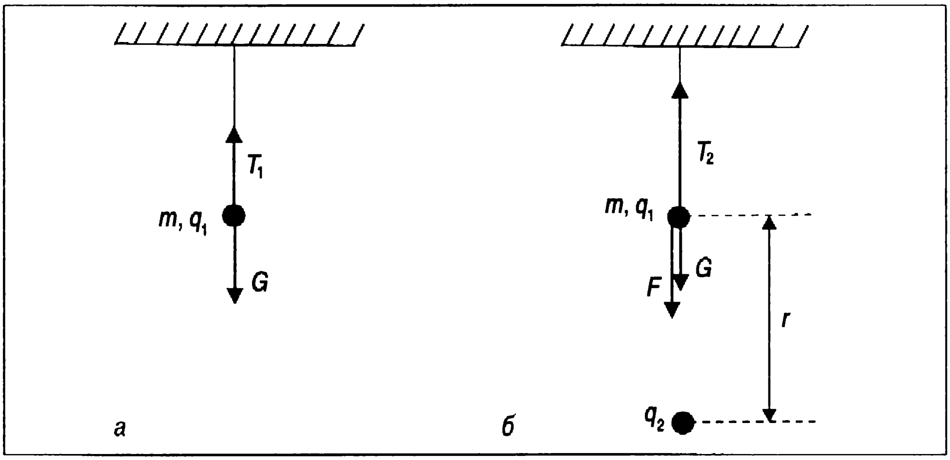
което е вярно твърдение, когато $q_1 \neq q_2$.

2. Ако **зарядите q_1 и q_2 са разноименни**, зарядът $q = \frac{q_1+q_2}{2}$ на топчетата след разделянето им има знака на по-големия по абсолютна стойност заряд. Посоката на Кулоновата сила се променя и тя от сила на привличане става сила на отблъскване.

1.3. Топче с маса 2 g, окачено на тънка копринена нишка, има заряд 300 nC. Под него на разстояние 5 cm се поставя друго заредено топче, в резултат на което опъването на нишката се увеличава два пъти. Определете заряда на второто топче.

Дадено: m = 2 g, q_1 = 300 nC, r = 5 cm
Да се намери: q_2
Решение

На окаченото топче действат две сили: силата на тежестта $G = mg$, насочена надолу, и силата на опън на нишката T_1, насочена нагоре (фиг. 1.1, *а*). Те са равни по големина,



Фиг. 1.1

защото топчето е неподвижно, т.е. $T_1 = G$. При поставянето на второто топче на първото действа допълнителна електрична сила F (фиг. 1.1, *б*). За да се увеличи опъването на нишката, зарядът q_2 трябва да има знак, противоположен на q_1, т.е. отрицателен. Тогава

$$T_2 = G + F.$$

Като отчетем, че $T_2 = 2T_1 = 2G$, намираме $F = G$. По закона на Кулон

$$F = k\frac{q_1|q_2|}{r^2},$$

откъдето следва

$$k\frac{q_1|q_2|}{r^2} = mg,$$

$$|q_2| = \frac{mgr^2}{kq_1} \approx 18 \text{ nC}.$$

Тук е отчетено, че $g = 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $k = 9.10^9\ \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$. Следователно зарядът е

$$q_2 = -18 \text{ nC}.$$

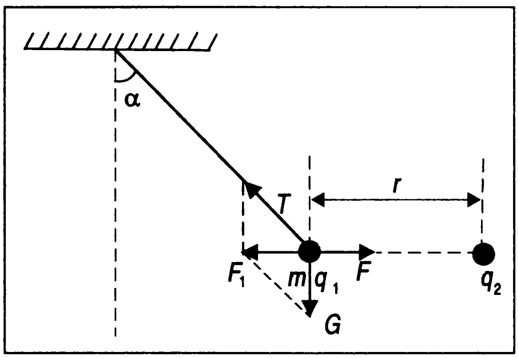
1.4. Топче с маса $m = 4$ g и заряд $q_1 = 280$ nC е окачено на копринена нишка. Ако към него се приближи друг заряд q_2, нишката се отклонява на ъгъл $\alpha = 45°$ (фиг. 1.2). Определете заряда q_2, ако разстоянието $r = 6$ cm.

Дадено: $m = 4$ g, $q_1 = 280$ nC, $\alpha = 45°$, $r = 6$ cm

Да се намери: q_2

Решение

По отклонението на нишката се вижда, че зарядите q_1 и q_2 са разноименни,



Фиг. 1.2

т.е. q_2 е отрицателен. Те се привличат с електрична сила

$$F = k\frac{q_1|q_2|}{r^2}.$$

На заряда q_1 действат още силата на тежестта G и силата на опън T от страна на нишката. Той е неподвижен и равнодействащата сила е нула. За да се уравновеси силата F, посоката на равнодействащата на G и T сила F_1 е противоположна на F. Силата F_1 намираме по правилото на успоредника. Тъй като $\alpha = 45°$, $F_1 = G = mg$. Тогава от равенството $F_1 = F$ следва

$$k\frac{q_1|q_2|}{r^2} = mg,$$

$$|q_2| = \frac{mgr^2}{kq_1} \approx 56 \text{ nC}.$$

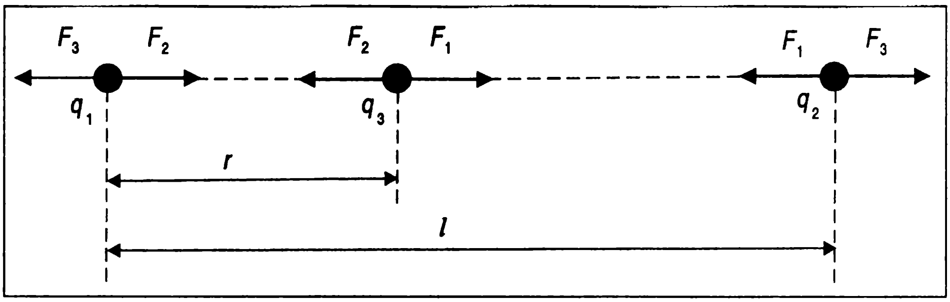
1.5. Два точкови заряда $q_1 = q$ и $q_2 = 4q$ се намират на разстояние l един от друг. Върху съединителната права между двата заряда се поставя заряд q_3, така че всеки един от зарядите е в равновесие. Определете заряда q_3 и разстоянието r между него и заряда q_1.

Дадено: $q_1 = q$, $q_2 = 4q$, l

Да се намери: q_3, r

Решение

Според принципа на суперпозицията на всеки заряд действа сила, която е равна на векторната сума от силите, породени от другите два заряда. Даден заряд е в равновесие, ако тази сила е нула. В нашия случай това е възможно само ако зарядът q_3 е с противоположен знак на зарядите q_1 и q_2, т.е. ако зарядът q е положителен, зарядът q_3 е отрицателен и обратно. Тогава силите, действащи между зарядите q_1 и q_2, са с противоположни посоки (фиг. 1.3). Нека означим големината на Кулоновата сила на привличане между q_1 и q_3 с F_2, между q_2 и q_3 с F_1 и на Кулоновата сила на отблъскване между q_1 и q_2 с F_3. Тогава зарядите са в равновесие, ако са изпълнени условията



Фиг. 1.3

за q_1: $F_2 = F_3$,

за q_2: $F_1 = F_3$,

за q_3: $F_1 = F_2$.

От тези условия само две са независими, например

$F_1 = F_2$ и $F_1 = F_3$.

От закона на Кулон (при $q > 0$) следва

$$F_1 = k\frac{|q_2||q_3|}{(l-r)^2} = k\frac{4q|q_3|}{(l-r)^2},$$

$$F_2 = k\frac{|q_1||q_3|}{r^2} = k\frac{q|q_3|}{r^2},$$

$$F_3 = k\frac{|q_1||q_2|}{l^2} = k\frac{4q^2}{l^2}.$$

След като заместим тези изрази в условията за равновесие, получаваме уравненията

$$\frac{4}{(l-r)^2} = \frac{1}{r^2},$$

$$\frac{|q_3|}{(l-r)^2} = \frac{q}{l^2}.$$

От първото уравнение, преписано във вида

$$4r^2 = (l-r)^2,$$

след кореннуване намираме

$$2r = l - r,$$

$$r = \frac{1}{3}.$$

След като заместим във второто уравнение тази стойност за r, получаваме

$$|q_3| = \left(\frac{l-r}{l}\right)^2 q = \frac{4}{9}q.$$

1.6. Три точкови заряда $q_1 = 0{,}9\ \mu\text{C}$, $q_2 = 0{,}05\ \mu\text{C}$ и $q_3 = 0{,}3\ \mu\text{C}$ са разположени върху права и са свързани с две нишки. Дължината на всяка нишка е $l = 0{,}1$ m. Намерете силите, с които нишките действат на зарядите, когато цялата система е неподвижна.

Дадено: $q_1 = 0{,}9\ \mu\text{C}$, $q_2 = 0{,}05\ \mu\text{C}$, $q_3 = 0{,}3\ \mu\text{C}$, $l = 0{,}1$ m
Да се намери: T_1, T_2
Решение

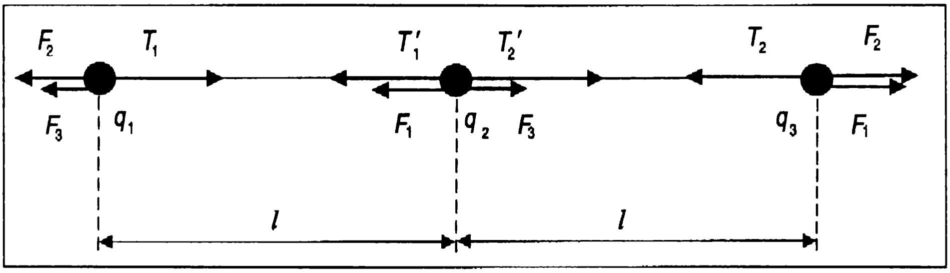
Силите, които действат на всеки един от зарядите, са показани на фиг. 1.4. Големината на Кулоновата сила на отблъскване между зарядите q_1 и q_2 е F_3, между q_2 и q_3 е F_1 и между q_3 и q_1 е F_2. На заряда q_1 от страна на нишката 1 действа сила на опън T_1, на заряда q_2 – сили на опън T_1' от нишката 1 и T_2' от нишката 2, на заряда q_3 – сила на опън T_2 от нишката 2. Цялата система е неподвижна, от което следва

$$F_2 + F_3 = T_1,$$

$$F_1 + T_1' = F_3 + T_2',$$

$$T_2 = F_1 + F_2.$$

От друга страна, нишките също са неподвижни. Съгласно с третия принцип на механиката силата, с която зарядът q_1 действа на нишката 1, е равна по големина на T_1 и е насочена наляво, а силата, с която зарядът q_2 действа на нишката 1, е равна по големина



Фиг. 1.4

на T_1' и е насочена надясно. Следователно, за да бъде нишката 1 неподвижна,

$$T_1' = T_1.$$

Аналогично, за да бъде нишката 2 неподвижна,

$$T_2' = T_2.$$

Като отчетем, че

$$F_1 = k\frac{q_2 q_3}{l^2},\quad F_2 = k\frac{q_1 q_3}{(2l)^2},\quad F_3 = k\frac{q_1 q_2}{l^2},$$

намираме

$$T_1 = F_2 + F_3 = \frac{kq_1}{l^2}\left(\frac{q_3}{4} + q_2\right) \approx 0{,}1\ \text{N},$$

$$T_2 = F_1 + F_2 = \frac{kq_3}{l^2}\left(q_2 + \frac{q_1}{4}\right) \approx 0{,}07\ \text{N}.$$

1.7. Във всеки от върховете на квадрат се намира заряд q. Какъв заряд q_0 трябва да се постави в центъра на квадрата, за да бъде всеки един от зарядите в равновесие?

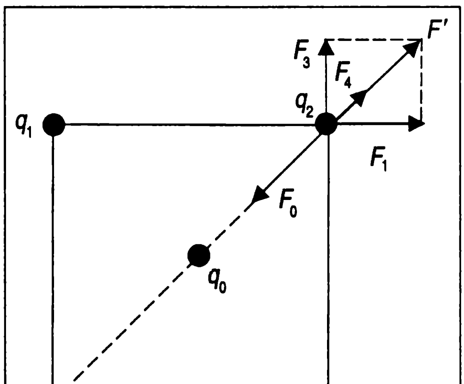
Дадено: q
Да се намери: q_0
Решение

Какъвто и заряд q_0 (по големина и знак) да се постави в центъра на квадрата (фиг. 1.5), той винаги ще бъде в равновесие, защото силите, с които му действат зарядите q_1 и q_3, са равни по големина и с противоположни посоки, т.е. те се уравновесяват. Аналогично зарядите q_2 и q_4 действат на заряда q_0 с равни по големина и противоположни по посока сили.

Да разгледаме силите, действащи на един от зарядите във връх на квадрата, например на q_2. Зарядите q_1, q_3 и q_4 действат на заряда q_2 съответно със сили F_1, F_3 и F_4, като

$$F_1 = F_3 = k\frac{q^2}{a^2},$$

където a е дължината на страната на квадрата, а



Фиг. 1.5

$$F_4 = k\frac{q^2}{d^2} = k\frac{q^2}{2a^2},$$

където $d=\sqrt{2}a$ е дължината на диагонала на квадрата. Равнодействащата F' на тези сили е насочена по правата, върху която лежи диагоналът на квадрата, и тя има големина

$$F' = \sqrt{2}F_1 + F_4 = k\frac{q_2}{a^2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right).$$

За да бъде уравновесена тази сила, зарядът q_0 трябва да е противоположен на q. Тогава той ще действа на заряда q_2 със сила на привличане

$$F_0 = k\frac{|q_0||q|}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 2k\frac{|q_0||q|}{a^2},$$

От равенството $F_0 = F'$ намираме

$$2|q_0||q| = q^2\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right) = |q|^2\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right),$$

$$|q_0| = |q|\frac{1+2\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}96|q|.$$

Задачи

1.8. Каква част от валентните електрони на медно (Cu) топче с обем V = 1 cm^3 трябва да се отстранят от него, за да получи некомпенсиран заряд q = 1 C?

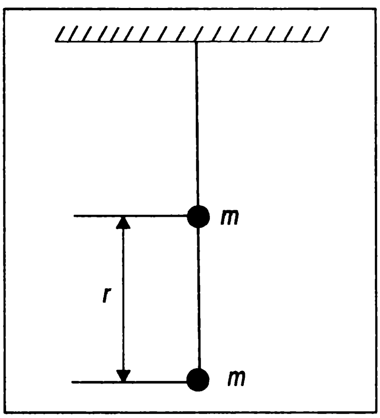
1.9. Определете заряда на железно (Fe) топче с обем 1 cm^3, ако би могло да се отстрани една милионна част от съдържащите се в него електрони.

1.10. Две отрицателно заредени прашинки се намират във въздух на разстояние 2 mm една от друга. Те се отблъскват със сила 9.10^{-5} N. Намерете броя на некомпенсираните електрони във всяка прашинка, ако техните електрични заряди са еднакви.

1.11. Две топчета от алуминий (Al), всяко с маса m = 1 g, се намират на разстояние r = 1 m едно от друго. С каква сила ще се привличат топчетата, ако η = 1 % от електроните на първото се прехвърлят върху второто топче?

1.12. Две еднакви заредени метални топчета се намират на определено разстояние едно от друго и се привличат. Зарядът на първото топче е q_1 = 1,6 nC. След допиране топчетата се раздалечават на разстояние, n = 2 пъти по-голямо от първоначалното, при което силата на взаимодействие намалява m = 5 пъти. Намерете първоначалния заряд q_2 на второто топче.

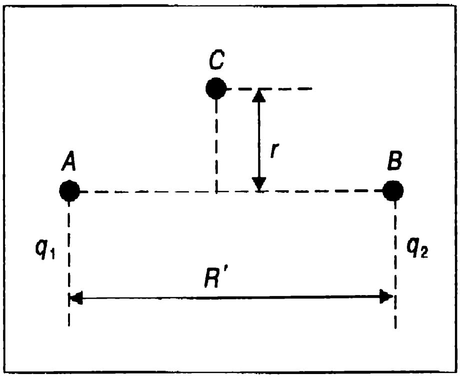
1.13. Две еднакви топчета, всяко с маса m = 20 g, имат еднакви заряди и са окачени на копринена нишка, както е показано на фиг. 1.6. Какъв е зарядът на всяко топче, ако силите на опън на нишките са еднакви, а разстоянието между топчетата е r = 0,3 m?



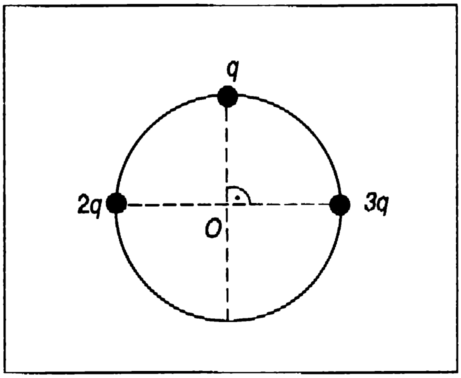
Фиг. 1.6

1.14. Две еднакви малки топчета, всяко с маса $m = 0{,}2$ g, са окачени в една точка на еднакви нишки с дължина $l = 25$ cm. Топчетата се наелектризират с еднакви заряди, при което разстоянието между тях става l. Определете заряда на топчетата.

★ **1.15.** Два неподвижни заряда $q_1 = 5$ μC и $q_2 = -5$ μC са разположени на разстояние $R = 10$ cm един от друг (фиг. 1.7). Заредена капка се намира в точка C на разстояние $r = 5$ cm от средата на отсечката AB. Каква сила действа на капката, ако зарядът ѝ се дължи на $N = 10$ некомпенсирани електрона?



Фиг. 1.7



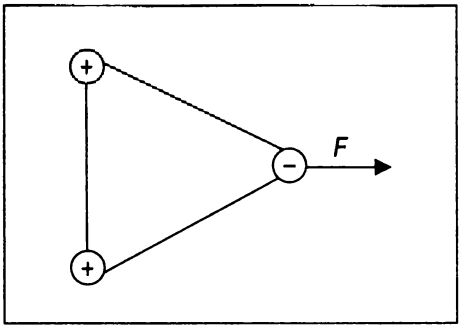
Фиг. 1.8

★ **1.16.** Три точкови заряда q, $2q$ и $-3q$ са разположени върху окръжност с радиус $R = 30$ cm, както е показано на фиг. 1.8. Намерете големината на силата, действаща на заряда $q = 10$ μC.

★★ **1.17.** Три еднакви заредени топчета, всяко с маса 10 g, са съединени с три еднакви нишки с дължини по 10 cm и са разположени в хоризонтална равнина. Два от зарядите са положителни, а третият е отрицателен, като всеки от тях има големина 0,1 μC. Към отрицателно зареденото топче е приложена сила, перпендикулярна на нишката, която свързва двата положителни заряда (фиг. 1.9). Под действието на тази сила системата се движи с ускорение, като силите на опън на нишките са еднакви.

а) Намерете ускорението на системата.

б) Определете големината на силата F.



Фиг. 1.9

Електростатично поле във вакуум

Основните характеристики на електростатичното поле във вакуум са **интензитет** и **потенциал**. Интензитетът E в дадена точка на полето определя силата F, с която то действа на заряд q, поставен в тази точка:

$$F = |q|E.$$

По посока интензитетът на полето съвпада с посоката на силата, действаща на положителен заряд, и е насочен по допирателната към силовите линии. Интензитетът на полето на точков заряд се дава с израза

$$E = k\frac{|q|}{r^2}.$$

За еднородно (хомогенно) електростатично поле интензитетът има една и съща големина и посока във всяка точка.

В електростатично поле работата, извършена от електричната сила за преместването на заряд от една точка на полето в друга точка, не зависи от траекторията, по която става преместването, а се определя само от началното (т. M) и крайното положение (т. N) на заряда:

$$A = W_M - W_N.$$

Величината W се нарича **електрична потенциална енергия** на заряда q в електростатично поле. Потенциалът φ на електростатичното поле в дадена точка се определя с отношението

$$\varphi = \frac{W}{q}.$$

Тогава работата A на електричната сила при пренасяне на заряда q от точка M в точка N е

$$A = q(\varphi_M - \varphi_N) = qU,$$

където $U = \varphi_M - \varphi_N$ се нарича **напрежение** между точките M и N в електростатичното поле.

Потенциалът на електростатичното поле на точков заряд q на разстояние r от него се дава с израза

$$\varphi = k\frac{q}{r}.$$

Когато полето се създава от няколко точкови заряда, интензитетът му в дадена точка се намира по правилото на успоредника, като се събират интензитетите на полетата, създадени от отделните точкови заряди. Потенциалът в тази точка е сума от потенциалите на полетата, създадени от отделните заряди.

Между интензитета и напрежението в еднородно поле съществува връзката

$$E = \frac{U}{d},$$

където U е напрежението между две точки на полето, а d – разстоянието между тях.

ПРИМЕРИ

1.18. Определете знака на зарядите и отношението между големините на зарядите на двете тела, показани на фиг. 1.10, *а* и *б*.

Решение

На фиг. 1.10, *а* е показана картина на силови линии, които започват от заряда и се отдалечават в безкрайност. Тъй като всяка силова линия започва от положителен заряд, зарядът на тялото е **положителен**. На фиг. 1.10, *б* е показана картина на силови линии, които идват от безкрайност и завършват върху заряда. Тъй като всяка силова линия завършва върху отрицателен заряд, идвайки от безкрайност, зарядът на тялото е **отрицателен**.

Показаните картини на силови линии се отнасят за точкови заряди. Големината на интензитета на полето, създадено от точков заряд на разстояние r от него, е

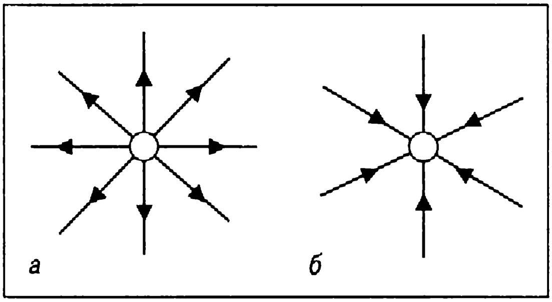
$$E = k\frac{|q|}{r^2}.$$

Тогава

$$E_+ = k\frac{|q_+|}{r^2},\quad E_- = k\frac{|q_-|}{r^2}$$

и отношението

$$\frac{E_+}{E_-} = \frac{|q_+|}{|q_-|}.$$



Фиг. 1.10

По-голяма гъстота на линиите съответства на по-силно електрично поле, т.е. на по-голям интензитет, и затова трябва да оценим гъстотата на силовите линии в двата случая. Броят на силовите линии в равнината на листа е

$$N_+ = 8,\quad N_- = 6.$$

Тъй като на разстояние r от зарядите те пробождат окръжност с дължина $2\pi r$, гъстотата им е съответно

$$n_+ = \frac{N_+}{2\pi r} = \frac{4}{\pi r},\quad n_- = \frac{N_-}{2\pi r} = \frac{3}{\pi r}.$$

Тогава

$$\frac{E_+}{E_-} = \frac{n_+}{n_-} = \frac{4}{3}$$

и следователно

$$\frac{|q_+|}{|q_-|} = \frac{4}{3}.$$

1.19. Интензитетът на електричното поле на разстояние $r_1 = 20$ cm от точков заряд е $E_1 = 100$ V/m. Определете интензитета на полето на разстояние $r = 40$ cm от заряда. Начертайте графика на зависимостта $E = f(r)$.

Дадено: $r_1 = 20$ cm, $E_1 = 100$ V/m, $r = 40$ cm

Да се намери: E, графика на зависимостта $E = f(r)$

Решение

Големината на интензитета на полето на разстояние r от заряда е

$$E = k\frac{|q|}{r^2}.$$

От друга страна,

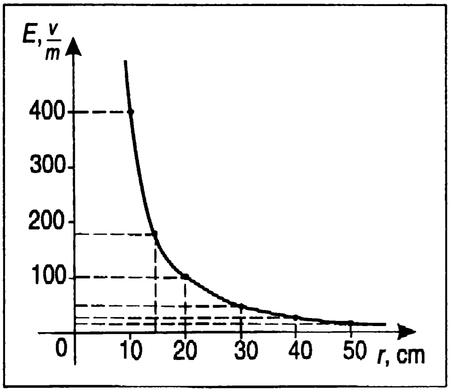
$$E_1 = k\frac{|q|}{r_1^2}.$$

Тогава

$$\frac{E}{E_1} = \frac{r_1^2}{r^2},$$

откъдето намираме

$$E = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 E_1 = \frac{1}{4}E_1 = 25\ \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$



Фиг. 1.11

За да построим графиката на интензитета на полето на точковия заряд, попълваме таблицата след съответните пресмятания на E.

r, cm	5	10	15	20	30	40	50
E, V/m	1600	400	177	100	55	25	16

На фиг. 1.11 е показана графиката на зависимостта $E = f(r)$, начертана по данните от таблицата.

1.20. Точков заряд q е поставен във върха на правия ъгъл в правоъгълен триъгълник (фиг. 1.12). Интензитетът на електричното поле в точките A и B е съответно $E_A = 20$ V/m и $E_B = 10$ V/m. Намерете интензитета на полето в точка C.

Дадено: $E_A = 20$ V/m, $E_B = 10$ V/m

Да се намери: E_C

Решение

Да означим катетите на правоъгълния триъгълник съответно с a и b, хипотенузата – с c, височината – с h. Тогава интензитетът в т. C е

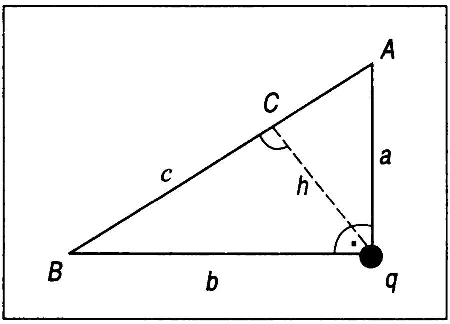
$$E_C = k\frac{|q|}{h^2}.$$

За да намерим неговата стойност, трябва да изразим h чрез a и b. След това, отчитайки, че

$$E_A = k\frac{|q|}{a^2},\quad E_B = k\frac{|q|}{b^2},$$

да изразим E_C чрез E_A и E_B. Лицето S на триъгълника може да се запише като

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}.$$



Фиг. 1.12

Тогава

$$h = \frac{ab}{c}.$$

Като използваме теоремата на Питагор

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

намираме

$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

След като заместим в израза за E_C, получаваме

$$E_C = k\frac{|q|}{a^2b^2}(a^2 + b^2) = k\frac{|q|}{a^2}\left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right).$$

Тъй като

$$\frac{E_B}{E_A} = \frac{a^2}{b^2},$$

намираме

$$E_C = E_A\left(\frac{E_B}{E_A} + 1\right) = E_A + E_B = 30\ \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

1.21. Разстоянието между зарядите q и nq ($n = 9$) е $l = 8$ cm. На какво разстояние от първия заряд се намира точката, в която интензитетът на електричното поле е нула? Отговорете на същия въпрос, при условие че зарядът nq се замени с противоположен.

Дадено: $l = 8$ cm, $n = 9$
Да се намери: r
Решение

На фиг. 1.13 е показано разположението на зарядите. Съгласно с принципа на суперпозицията интензитетът на електричното поле във всяка точка е векторна сума от интензитетите на полетата, създадени от зарядите 1 и 2. За да бъде интензитетът на полето в дадена точка C нула, интензитетите E_1 и E_2 трябва да имат противоположни посоки и еднакви големини. Точката C трябва да лежи на съединителната права между 1 и 2. На фиг. 1.13 е показан случаят, когато зарядът q е положителен. Тогава

$$E_1 = k\frac{q}{r^2},\quad E_2 = k\frac{nq}{(l-r)^2}$$

и от равенството $E_1 = E_2$ следва

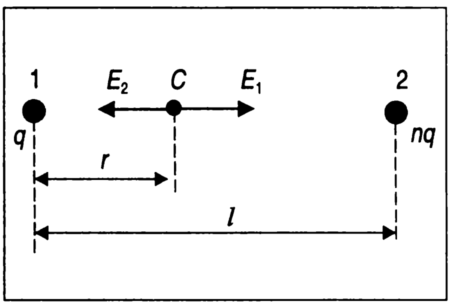
$$nr^2 = (l-r)^2.$$

Уравнението може да се запише във вида

$$(n-1)r^2 + 2lr - l^2 = 0.$$

След отделяне на пълен квадрат получаваме

$$\left(r\sqrt{n-1} + \frac{l}{\sqrt{n-1}}\right)^2 = \frac{nl^2}{n-1}.$$



Фиг. 1.13

След коренуване на двете страни се получава

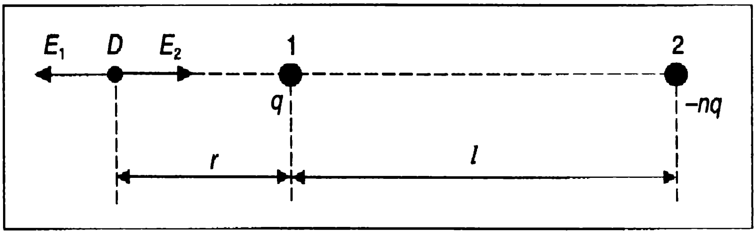
$$r = \frac{l}{n-1}\left(\sqrt{n}-1\right) = \frac{l}{\sqrt{n}+1} = 2\ \text{cm}.$$

На фиг. 1.14 е показан случаят, при който nq е заменен с $-nq$, а зарядът q остава положителен. За да имат интензитетите E_1 и E_2 противоположни посоки, т. D трябва да лежи на съединителната права извън отсечката, определена от зарядите 1 и 2. Тъй като $q < |nq|$, т. D трябва да се намира по-близо до заряда 1, отколкото до 2. Тогава

$$nr^2 = (l + r)^2.$$

Това уравнение има решение

$$r = \frac{l}{n-1}\left(\sqrt{n}+1\right) = \frac{l}{\sqrt{n}-1} = 4\ \text{cm}.$$



Фиг. 1.14

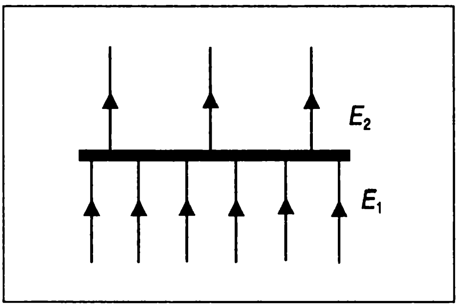
1.22. Електрично поле е получено от наслагването на външно еднородно (хомогенно) поле и полето на заредена пластина, което също може да се разглежда като еднородно (фиг. 1.15). Интензитетът на електричното поле под пластината е $E_1 = 50\ \frac{\text{kV}}{\text{m}}$, а над пластината – $E_2 = 20\ \frac{\text{kV}}{\text{m}}$. Намерете интензитета на полето, създадено от пластината. Оценете заряда на пластината, ако външното поле ѝ действа със сила 0,7 N.

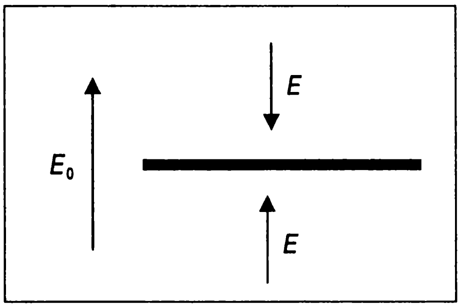
Дадено: $E_1 = 50\ \frac{\text{kV}}{\text{m}}$, $E_2 = 20\ \frac{\text{kV}}{\text{m}}$, $F = 0{,}7\ \text{N}$

Да се намери: E, q

Решение

Да означим с E_0 интензитета на външното поле, а с E – интензитета на електричното поле, създадено от заредената пластина. Картината на силовите линии показва, че двете полета трябва да са насочени перпендикулярно на равнината на пластината (фиг. 1.16),





Фиг. 1.15 *Фиг. 1.16*

като зарядът й трябва да бъде отрицателен ($q < 0$). Съгласно с принципа на суперпозицията

$$E_1 = E_0 + E,$$
$$E_2 = E_0 - E.$$

Като извадим почленно от първото равенство второто, получаваме

$$E = \frac{1}{2}(E_1 - E_2) = 15 \ \frac{\text{kV}}{\text{m}}.$$

За интензитета на външното електрично поле намираме

$$E_0 = \frac{1}{2}(E_1 + E_2) = 35 \ \frac{\text{kV}}{\text{m}}.$$

За да оценим заряда q, ще разсъждаваме по следния начин. Нека площта на пластината е S. Ще разделим пластината на n малки участъци, всеки с площ ΔS и заряд Δq, който може да се разглежда като точков. На един такъв точков заряд външното поле действа със сила

$$\Delta F = |\Delta q| E_0,$$

насочена перпендикулярно на пластината. Общата сила ще бъде

$$F = n\Delta F = n|\Delta q| E_0 = |q| E_0.$$

Тогава намираме

$$|q| = \frac{2F}{E_1 + E_2} = 20 \ \mu\text{C}.$$

Коментар. Нека се опитаме да определим от какви величини зависи интензитетът на полето E, създадено от заредена метална пластина, и по какъв начин. В случай на точков заряд интензитетът на полето в дадена точка зависи от заряда q, разстоянието на точката до заряда r и константата k или $\frac{1}{\varepsilon_0}$. Тяхната комбинация $E = k\frac{q}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ се измерва в единици $\frac{\text{N}}{\text{C}}$. Тъй като разглеждаме полето на пластината като еднородно, то не може да зависи от разстоянието до нея. Полето зависи от заряда q на пластината, а така също и от нейната площ S (тя е тяло с определени размери). В израза за интензитета трябва да участват още константата k или константата $\frac{1}{\varepsilon_0}$. От трите величини – q, S, $\frac{1}{\varepsilon_0}$ е нужно да се състави комбинация, която се измерва в единици $\frac{\text{N}}{\text{C}}$. Тъй като q се измерва в C, S – в m^2, k или $\frac{1}{\varepsilon_0}$ – в $\frac{\text{N.m}^2}{C^2}$, веднага се вижда, че комбинацията $\frac{q}{\varepsilon_0 S}$ се измерва в $\frac{\text{N}}{\text{C}}$, каквато е единицата за интензитет на електричното поле. Следователно интензитетът E на полето на пластината и комбинацията $\frac{q}{\varepsilon_0 S}$ могат да се различават само с числен множител. Определянето на този множител е възможно по друг начин, който води до точната формула

$$E = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}.$$

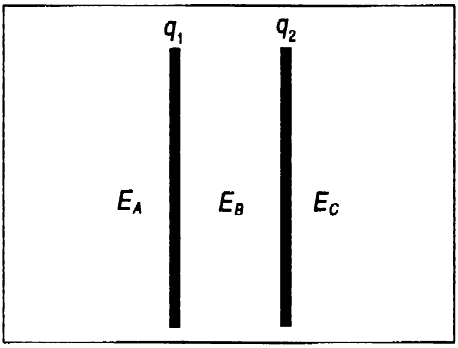
Този резултат е приложим за точки, разположени близо до пластината, и ще го използваме при решаване на редица задачи, в които участва заредена пластина.

1.23. Две метални пластини, всяка с площ $S = 100\ \mathrm{cm}^2$, имат заряди съответно $q_1 = 0{,}1\ \mathrm{nC}$ и $q_2 = -3q_1$. Те са разположени успоредно една на друга и разстоянието помежду им е много по-малко от размерите им (фиг. 1.17).

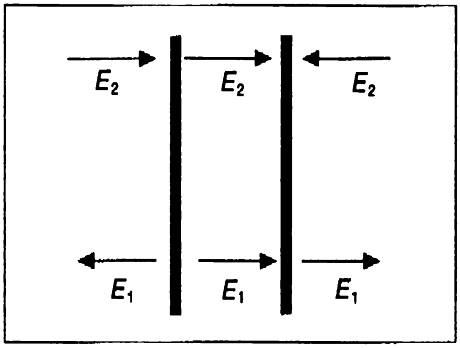
а) Намерете интензитета на електричното поле извън пластините (E_A и E_C) и между тях (E_B).

б) Начертайте графиката на зависимостта $E = f(x)$, където x е координатата по ос, перпендикулярна на пластините.

в) Определете силата, която действа на всяка от пластините.



Фиг. 1.17



Фиг. 1.18

Дадено: $S = 100\ \mathrm{cm}^2$, $q_1 = 0{,}1\ \mathrm{nC}$, $q_2 = -3q_1$
Да се намери: E_A, E_B, E_C, $E = f(x)$, F_1, F_2
Решение

а) Ще разглеждаме електростатичното поле, създадено от заредените пластини, като еднородно. Интензитета на полето, създадено от пластина 1, ще означим с E_1, а интензитета на полето, създадено от пластината 2 – с E_2. На фиг. 1.18 са означени интензитетите във всяка една от областите, като е взет предвид знакът на зарядите на пластините. Като отчетем, че

$$E_1 = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S},\quad E_2 = \frac{3q_1}{2\varepsilon_0 S},$$

получаваме съгласно с принципа на суперпозицията

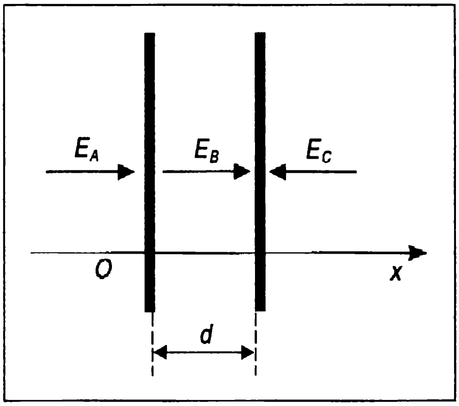
$$E_A = E_2 - E_1 = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S} = 1{,}13\ \frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}},$$

$$E_B = E_1 + E_2 = \frac{2q_1}{\varepsilon_0 S} = 2{,}26\ \frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}},$$

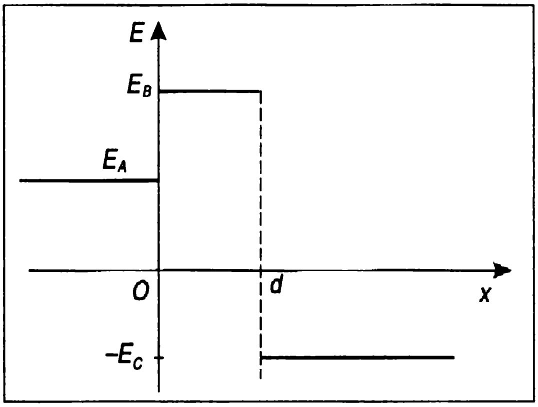
$$E_C = E_2 - E_1 = 1{,}13\ \frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}.$$

б) Нека оста Ox е насочена надясно и има начало, съвпадащо с пластина 1 (фиг. 1.19). Когато посоката на интензитета съвпада с посоката на оста, интензитетът ще бъде положителен, а когато е в посока, противоположна на оста – отрицателен. На фиг. 1.20 е показана графиката на $E = f(x)$.

в) Тъй като зарядите на пластините са противоположни по знак, те се привличат. Съгласно с пример 1.22 силата F_1, която действа на пластина 1, се намира по формулата



Фиг. 1.19



Фиг. 1.20

$$F_1 = q_1E_2 = \frac{3q_1^2}{2\varepsilon_0 S} \approx 170 \text{ nN}.$$

Силата F_2 има същата големина, приложена е върху пластината 2, и е противоположна по посока на F_1.

1.24. Електричен заряд q е преместен от точка C в точка D в полето на положителен точков заряд. Покажете, че работата, извършена от електричната сила, не зависи от траекторията на заряда.

Решение

На фиг. 1.21 са показани две възможни траектории CMD и CND, които включват участъците CM и ND в радиално направление и дъги от окръжности CN и MD. Работата, извършена от електричната сила по първата траектория, е

$$A_{CMD} = A_{CM} + A_{MD}.$$

Тъй като в участъка MD електричната сила е перпендикулярна на траекторията, тя не върши работа и $A_{MD} = 0$. Работата A_{CM} се върши от сила, която е насочена по преместването и която променя големината си с увеличаване на разстоянието до заряда източник, т.е.

$$A_{CMD} = A_{CM}.$$

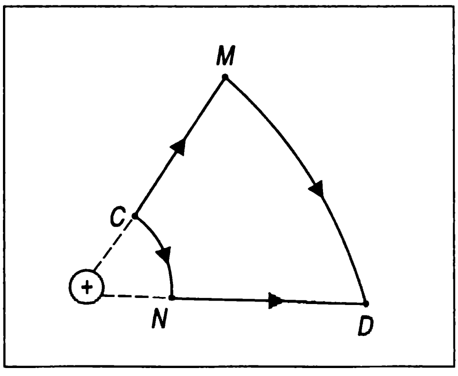
Аналогично

$$A_{CND} = A_{CN} + A_{ND} = A_{ND}.$$

Тъй като $CM = ND$ и електричната сила има едни и същи стойности в тези участъци (тя зависи само от разстоянието до източника), е в сила равенството

$$A_{CM} = A_{ND},$$

т.е. при преместване на заряда q по тези две траектории електричната сила върши една и съща работа. Точките C и D могат да бъдат свързани с траектория от същия тип (фиг. 1.22). При преместване по дъгите силата не върши ра-



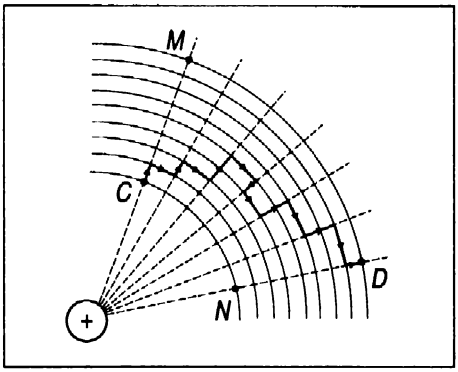
Фиг. 1.21

бота, а по участъците в радиално направление, чиято обща дължина е равна на CM и ND, се върши работа

$$A_{CD} = A_{CM} = A_{ND}.$$

Възможно е да се построят произволен брой траектории от този вид с най-различни дължини на дъгите и радиални участъци, които свързват точките C и D. Ето защо можем да направим извода, че работата A на електричната сила не зависи от траекторията, а само от положението на точките C и D. Това ни позволява да запишем

$$A_{CD} = W_C - W_D = q(\varphi_C - \varphi_D),$$



Фиг. 1.22

където W_C (W_D) е електричната потенциална енергия на заряда q в точката C (D) на полето, а φ_C (φ_D) – потенциалът на полето в тази точка.

Коментар. Електростатичното поле, създадено от заредено тяло, притежава същото свойство както полето на точков заряд. В това можем да се убедим, ако разгледаме заряда на тялото като съставен от огромен брой заряди, всеки един от които приемаме за точков. Като вземем предвид принципа на суперпозицията и свойството на полето на точков заряд, стигаме до същия извод. Следователно **работата, която върши електричната сила при преместването на заряд от една точка C в друга точка D на произволно електростатично поле, не зависи от траекторията, а само от положението на точките C и D.**

1.25. Намерете потенциала на електростатичното поле в точка C за случая, описан в пример 1.20, ако в точките A и B стойностите му са съответно $\varphi_A = 40$ V и $\varphi_B = 30$ V.

Дадено: $\varphi_A = 40$ V, $\varphi_B = 30$ V.
Да се намери: φ_C
Решение

Потенциалът в точката C е

$$\varphi_C = k\frac{q}{h} = k\frac{qc}{ab},$$

където a и b са катетите, а c – хипотенузата. Като използваме теоремата на Питагор, намираме

$$\varphi_C = k\frac{q\sqrt{a^2+b^2}}{ab} = k\frac{q}{a}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}+1}.$$

Понеже

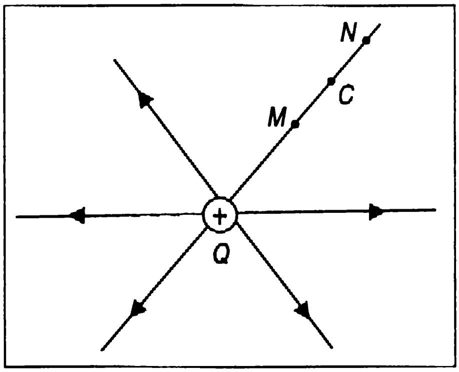
$$\varphi_A = k\frac{q}{a}, \quad \text{а} \quad \varphi_B = k\frac{q}{b},$$

$$\frac{\varphi_B}{\varphi_A} = \frac{a}{b}.$$

Тогава

$$\varphi_C = \varphi_A\sqrt{\frac{\varphi_B^2}{\varphi_A^2}+1} = \sqrt{\varphi_A^2+\varphi_B^2} = 50 \text{ V}.$$

1.26. Точка N е отдалечена от заряда, източник на полето, на два пъти по-голямо разстояние, отколкото точката M (фиг. 1.23). Електричната сила премества заредена частица от т. M в т. N, при което извършва работа $A_0 = 6$ J. Каква работа A е извършила силата в първата половина от преместването?



Фиг. 1.23

Дадено: $A_0 = 6$ J, $QM = MN = l$
Да се намери: A
Решение

Потенциалната енергия на заредена частица в дадена точка на електростатично поле е $W = q\varphi$, където q е зарядът на частицата, а φ – потенциалът на полето в тази точка. Следователно търсената работа е

$$A = q(\varphi_M - \varphi_C),$$

където точката C е по средата между M и N. Като отчетем, че

$$\varphi_M = k\frac{Q}{l},\quad \varphi_C = k\frac{Q}{\frac{3}{2}l},$$

намираме

$$A = k\frac{qQ}{3l}.$$

От друга страна,

$$A_0 = q(\varphi_M - \varphi_N) = k\frac{qQ}{2l}.$$

Тъй като $\varphi_N = k\frac{Q}{2l}$, след сравняване на A и A_0 получаваме

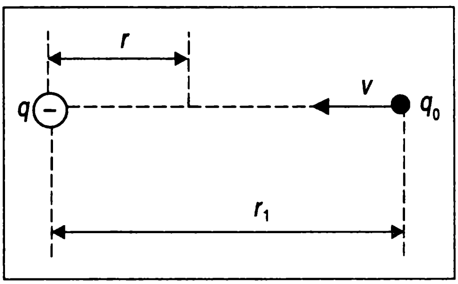
$$A = \frac{2}{3}A_0 = 4 \text{ J}.$$

1.27. Електрон се движи към неподвижен точков заряд $q = -0{,}1$ nC (фиг. 1.24). На разстояние 0,2 m скоростта на електрона е 1.10^6 m/s. На какво минимално разстояние ще се приближи електронът до неподвижния заряд?

Дадено: $q = -0{,}1$ nC, $r_1 = 0{,}2$ m, $v = 1.10^6$ m/s
Да се намери: r
Решение

Когато електронът се приближава до неподвижния заряд, на него му действа Кулонова сила, насочена противоположно на скоростта. Движението на електрона е закъснително и той спира на разстояние r от неподвижния заряд. За определянето на r ще използваме закона за запазване на енергията – $E_{нач} = E_{кр}$. Понеже

$$E_{нач} = \frac{mv^2}{2} + k\frac{q_0 q}{r_1},\quad E_{кр} = 0 + k\frac{q_0 q}{r},$$



Фиг. 1.24

намираме

$$k\frac{q_0q}{r}=\frac{mv^2}{2}+k\frac{q_0q}{r_1}.$$

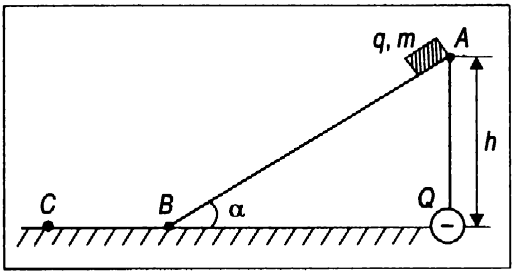
Оттук следва

$$r=\frac{r_1}{1+\dfrac{mv^2}{2kq_0q}}\approx 0{,}12\text{ m}.$$

Тук е отчетено, че

$$q_0=1{,}6.10^{-19}\text{ C},\quad m=9{,}1.10^{-31}\text{ kg}.$$

1.28. Гладка наклонена равнина сключва ъгъл α = 30° с гладка хоризонтална равнина. От височина h = 10 cm (т. A) се спуска без начална скорост тежко тяло с маса m = 10 g и положителен заряд q = 50 nC. Отрицателен заряд Q = –40 nC е закрепен във върха на правия ъгъл (фиг. 1.25).



Фиг. 1.25

а) Определете скоростта на тялото, когато то достигне хоризонталната равнина (т. B).

б) Намерете максималното разстояние BC, на което ще се отдалечи тялото от основата на наклонената равнина.

в) При каква големина на неподвижния заряд тялото ще спре точно в края на наклонената равнина. Обяснете качествено (без пресмятания) какво ще бъде по-нататъшното поведение на тялото – ще остане ли неподвижно, или ще се движи в определена посока.

Дадено: α = 30°, h = 10 cm, m = 10 g, q = 50 nC, Q = 40 nC

Да се намери: v, l, Q_1

Решение

а) Равнината действа на тялото със сила на реакция, която е перпендикулярна на наклона. При движението на тялото тази сила не извършва работа, защото е перпендикулярна на посоката на движение. Следователно пълната енергия на тялото се запазва, т.е. $E_A = E_B$. Потенциалната му енергия е сума от потенциалната енергия на тяло над земната повърхност mgh и електричната потенциална енергия $q\varphi$. Тогава

$$E_A=mgh+q\varphi_A=mgh-\frac{kqQ}{h},$$

$$E_B=\frac{mv^2}{2}+q\varphi_B=\frac{mv^2}{2}-\frac{kqQ}{\sqrt{3}h}.$$

Оттук следва

$$v=\sqrt{2gh\left[1-\frac{kqQ}{mgh^2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)\right]}\approx 0{,}7\text{ m/s}.$$

б) Нека положим $BC = l$. В момента на максимално отдалечаване скоростта на тялото е нула. От закона за запазване на енергията имаме $E_A = E_C$, където

$$E_C = q\varphi_C = -\frac{kqQ}{l+\sqrt{3}h}.$$

След заместване получаваме

$$l = h\left[\frac{1}{1-\frac{mgh^2}{kqQ}} - \sqrt{3}\right] \approx 5 \text{ cm}.$$

в) От условието $v = 0$ в основата на наклонената равнина намираме

$$Q_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\frac{mgh^2}{kq} \approx 526 \text{ nC}.$$

За да може при спускането си по наклонената равнина тялото да има скорост нула в т. B, трябва от дадено място да започне да действа сила, чиято посока е противоположна на посоката на скоростта. След като тялото стигне до т. B, тази сила ще го задвижи в обратна посока нагоре по равнината.

Задачи

1.29. Поради компенсиране на част от заряда на метално топче големината на интензитета на електричното поле на разстояние 30 cm от него намалява със $100\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$. С колко се е изменил зарядът на топчето?

1.30. Зарядът на малко метално топче се увеличава с 44 %. Как и с колко трябва да се измени разстоянието от заряда до точката на наблюдение, за да не се измени:

а) интензитетът на електростатичното поле;

б) потенциалът на електростатичното поле?

1.31. Интензитетът и потенциалът на електростатичното поле, създадено от точков заряд, в точка A са съответно $36\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$ и 180 V, а в точка B – $9\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$ и 90 V. Определете интензитета и потенциала на полето в точка C, която лежи по средата между т. A и т. B.

1.32. Електростатично поле е създадено от два равни по големина едноименни точкови заряда, разположени на известно разстояние един от друг.

а) Определете интензитета и потенциала на полето в точката, лежаща по средата между тях.

б) Намерете интензитета и потенциала на полето в същата точка, ако единият заряд се замени с противоположен по знак.

1.33. Електрон навлиза в еднородно електростатично поле с интензитет $E = 200\ \frac{\text{kV}}{\text{m}}$. Частицата се движи със скорост $v_0 = 100\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$ по посока, противоположна на силовите линии.

а) Намерете силата F, която действа на електрона.

б) С какво ускорение a се движи електронът?

в) На какво разстояние d от навлизането на частицата в полето, скоростта ѝ ще се увеличи 5 пъти?

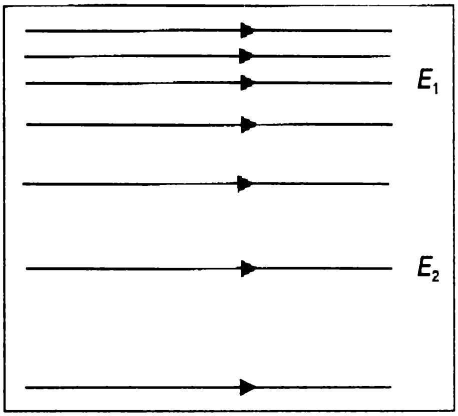
г) Какво е напрежението U между тези две точки?

* **1.34.** Два точкови заряда q_1 = 20 nC и q_2 = 160 nC са разположени на разстояние R = 5 cm един от друг. Определете интензитета и потенциала на електростатичното поле в точка, отдалечена на разстояние a = 3 cm от първия заряд и на b = 4 cm – от втория.

1.35. Три метални пластини, заредени положително, са разположени успоредно една на друга. Зарядът на пластина 1 е q = 600 nC. Силата, която действа на пластината 2, е F_1 = 2 N. Ако отстраним пластината 3, силата, действаща на пластината 2, е F_2 = 3 N. Намерете зарядите на пластините 2 и 3, ако всяка пластина има площ S = 100 cm^2. Електростатичното поле, създадено от пластините, да се разглежда като еднородно (хомогенно).

** **1.36.** Заредена капка пада по направление на силовите линии на еднородно (хомогенно) електростатично поле с интензитет $E = 20\ \dfrac{\text{V}}{\text{m}}$, като силата на тежестта G е по-голяма от електричната сила F. На капката действа също и сила на съпротивление $f = \alpha v$, където v е големината на скоростта ѝ, а α – числен коефициент. Определете отношението между заряда q и масата m на капката, ако при равномерно движение на капката в поле, насочено надолу, скоростта и е два пъти по-голяма отколкото при движение в поле, насочено нагоре.

1.37. Може ли да съществува електростатично поле, чиито силови линии са успоредни прави, а интензитетът на полето нараства в направление, перпендикулярно на силовите линии (фиг. 1.26)?



Фиг. 1.26

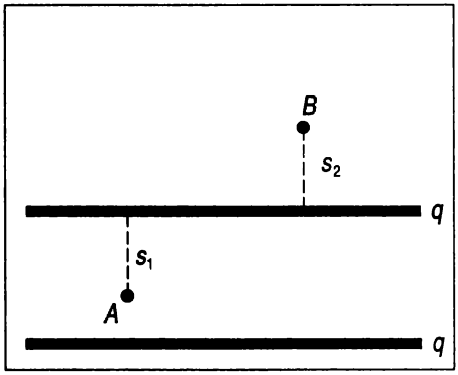
1.38. В еднородно електростатично поле с интензитет $E = 1\ \dfrac{\text{kV}}{\text{m}}$ електричен заряд q = –25 nC е преместен по посока на силова линия на разстояние s = 2 cm. Да се намери:

а) работата, извършена от електричната сила;

б) изменението на електричната потенциална енергия на заряда;

в) напрежението между началната и крайната точка.

1.39. Две успоредни метални пластини, всяка с площ S, са заредени с еднакви заряди q. Намерете разликата $\varphi_B - \varphi_A$ между потенциалите φ_B и φ_A, ако разстоянията s_1 и s_2 на точките A и B до една от пластините са известни (фиг. 1.27). Размерите на пластините са много по-големи от разстоянието между тях, а също от s_1 и s_2.



Фиг. 1.27

Проводници и диелектрици в електростатично поле

При поставяне на проводник във външно електростатично поле става преразпределение на свободните електрони, като едни части от него се зареждат **положително**, а други – **отрицателно**. Проводникът се наелектризира по индукция, а натрупаните заряди се наричат индуцирани. Те са разположени само по повърхността на проводника. В обема на проводника интензитетът на електричното поле е нула и няма некомпенсирани статични заряди. Това е в сила и за случая на зареден проводник независимо от начина на наелектризиране.

Около всеки зареден проводник се създава електрично поле, чийто интензитет е различен от нула само извън проводника, а всички точки от проводника, независимо дали са от повърхността му, или са вътре в него, имат еднакъв потенциал. Той се нарича потенциал на проводника.

Ако проводникът е кух и в областта, която той обхваща, няма заряди, всички точки от тази област имат потенциал, равен на потенциала на проводника. Интензитетът на електричното поле в тази област е нула.

Около метално топче с радиус R (или сфера с радиус R), чийто заряд е q, се създава електростатично поле, което на разстояние $r > R$ от центъра му има интензитет

$$E = k\frac{|q|}{r^2}$$

и потенциал

$$\varphi = k\frac{q}{r}.$$

Потенциалът на такова топче (или сфера) с радиус R е

$$\varphi = k\frac{q}{R}.$$

При поставяне на диелектрик във външно електростатично поле по повърхността му се получават некомпенсирани положителни и отрицателни заряди, които се дължат на подреждането на електричните диполи. Появата на некомпенсираните заряди променя електростатичното поле в обема на диелектрика, което е по-слабо от външното, но не е нула. Диелектричната проницаемост на средата показва колко пъти отслабва електростатичното поле в присъствие на диелектрик

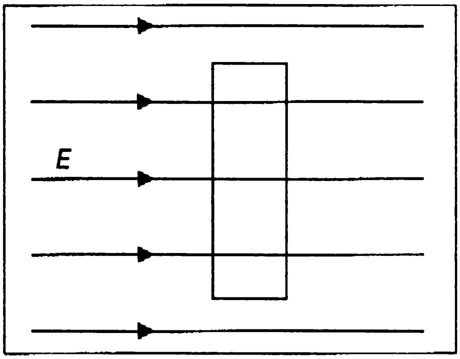
$$\varepsilon = \frac{E_0}{E},$$

където E_0 е интензитетът на външното електрично поле, а E – на полето в обема на диелектрика.

ПРИМЕРИ

1.40. В еднородно електрично поле с интензитет E се внася незаредена метална пластина (фиг. 1.28). Какъв заряд се индуцира върху всяка нейна страна, ако площта на пластината е S?

Дадено: E, S
Да се намери: q_1, q_2
Решение



Фиг. 1.28

Металната пластина е проводник и съдържа свободни електрони. Електричното поле действа на тези електрони със сила, насочена противоположно на интензитета E. По този начин върху лявата страна на пластината се появява некомпенсиран отрицателен заряд, а върху дясната – некомпенсиран положителен заряд. Преразпределението на електроните продължава, докато полето в пластината стане нула, т.е. $E_{пл} = 0$. Тъй като пластината първоначално е незаредена, от закона за запазване на електричния заряд следва

$$q_1 + q_2 = 0,$$

където q_1 е индуцираният отрицателен заряд, а q_2 – индуцираният положителен заряд. Тогава

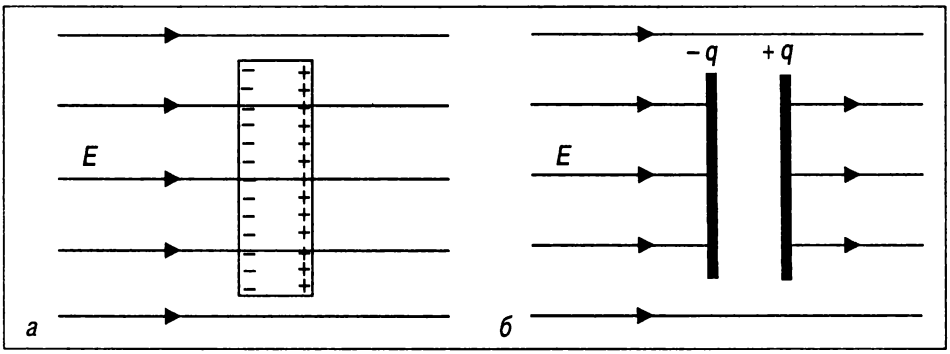
$$q_1 = -q_2 = -q$$

и пластината с индуциран върху нея заряд (фиг. 1.29, *а*) може да се замени с две тънки заредени пластини (фиг. 1.29, *б*), между които интензитетът на полето е нула. Съгласно с принципа на суперпозицията полето между пластините се получава от наслагването на външното поле с интензитет E и полето с интензитет E', създадено от заредените пластини. Интензитетът E' е насочен в противоположна посока на E и $E' = E$. Като отчетем, че

$$E' = \frac{q}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q}{2\varepsilon_0 S} = E'_+ + E'_- = \frac{q}{\varepsilon_0 S},$$

намираме

$$q = \varepsilon_0 SE.$$



Фиг. 1.29

1.41. Пластина 1 има заряд $Q_1 = 2$ mC, а пластина 2 – заряд $Q_2 = 4$ mC. Пластините се поставят на малко разстояние помежду им в сравнение с техните размери. Намерете заряда q_1 върху лявата страна на пластина 2 и заряда q_2 върху дясната ѝ страна.

Дадено: $Q_1 = 2$ mC, $Q_2 = 4$ mC

Да се намери: q_1, q_2

Решение

Пластината 1 създава еднородно (хомогенно) електрично поле с интензитет

$$E = \frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S},$$

където S е площта ѝ. Пластината 2 се намира в електричното поле на пластината 1, при което зарядите ѝ се преразпределят така, че интензитетът на резултантното поле в обема ѝ да е равен на нула. Върху лявата страна на пластината 2 се индуцира отрицателен заряд, а върху дясната ѝ страна – положителен, като

$$q_1 < q_2.$$

От закона за запазване на електричния заряд следва

$$q_1 + q_2 = Q_2.$$

Интензитетът на полето в обема на пластината 2 е (фиг. 1.30)

$$E + E_1 - E_2 = 0.$$

Като заместим E, $E_1 = \dfrac{q_1}{2\varepsilon_0 S}$, $E_2 = \dfrac{q_2}{2\varepsilon_0 S}$,

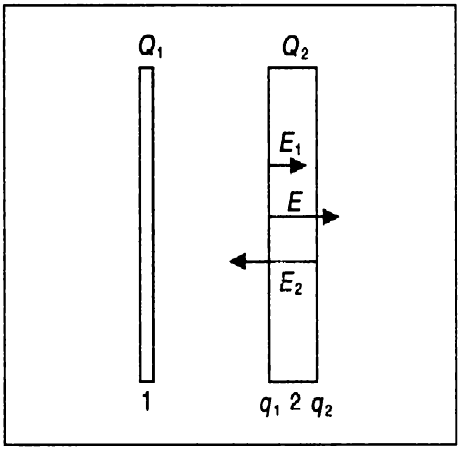
имаме

$$Q_1 + q_1 - q_2 = 0.$$

Тогава

$$q_1 = \frac{Q_2 - Q_1}{2} = 1 \text{ mC},$$

$$q_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = 3 \text{ mC}.$$



Фиг. 1.30

1.42. Разстоянието между две заредени метални топчета е много по-голямо от техните размери. Първото топче има радиус $R_1 = 2$ cm и потенциал $\varphi_1 = 30$ V, а второто – радиус $R_2 = 3$ cm и потенциал $\varphi_2 = 20$ V. Определете потенциала на топчетата, след като бъдат свързани с тънък проводник.

Дадено: $R_1 = 2$ cm, $\varphi_1 = 30$ V, $R_2 = 3$ cm, $\varphi_2 = 20$ V.

Да се намери: φ

Решение

Поради голямото разстояние между топчетата те не си влияят непосредствено. Зарядът на първото топче е

$$q_1 = \frac{R_1 \varphi_1}{k},$$

а на второто –

$$q_2 = \frac{R_2 \varphi_2}{k}.$$

Поради разликата в потенциалите ($E \neq 0$), когато топчетата се свържат, започва преразпределение на зарядите. То продължава до изравняване на потенциалите на топчетата. Тогава зарядът на първото топче става

$$Q_1 = \frac{R_1\varphi}{k},$$

а на второто –

$$Q_2 = \frac{R_2\varphi}{k}.$$

Приемаме, че върху тънкия проводник не се натрупва заряд поради малките му размери.

От закона за запазване на електричния заряд имаме

$$Q_1 + Q_2 = q_1 + q_2.$$

След заместване намираме

$$\frac{R_1\varphi}{k} + \frac{R_2\varphi}{k} = \frac{R_1\varphi_1}{k} + \frac{R_2\varphi_2}{k},$$

$$\varphi = \frac{R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2}{R_1 + R_2} = 24\ \text{V}.$$

1.43. В еднородно електрично поле са поставени плътно притиснати една до друга плоскопаралелни пластини от слюда ($\varepsilon_1 = 6$) и текстолит ($\varepsilon_2 = 7$) така, че силовите линии на полето са перпендикулярни на дългите стени на пластините. Интензитетът на полето в текстолита е $E_т = 60$ V/m. Определете интензитета на електричното поле в пластината от слюда и извън пластините.

Дадено: $\varepsilon_1 = 6$, $\varepsilon_2 = 7$, $E_т = 60$ V/m
Да се намери: $E_{сл}$, E
Решение

Когато диелектричните пластини се поставят в еднородно електрично поле с интензитет E, те се поляризират и върху стените им се появява електричен заряд (фиг. 1.31). Този заряд създава допълнително електрично поле, чийто интензитет в пластината от слюда е E_1, а в пластината от текстолит – E_2. Съгласно с принципа на суперпозицията интензитетът на полето в пластината от слюда е

$$E_{сл} = E - E_1 = \frac{E}{\varepsilon_1},$$

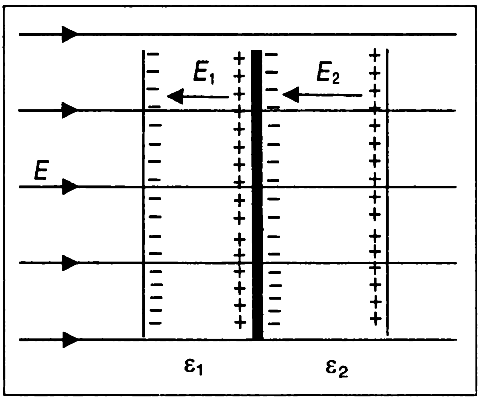
а в пластината от текстолит

$$E_т = E - E_2 = \frac{E}{\varepsilon_2}.$$

Тук сме отчели, че в диелектрик интензитетът на полето отслабва ε пъти. Тогава имаме

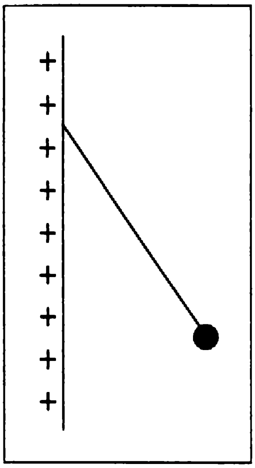
$$E = \varepsilon_2 E_т = 420\ \frac{\text{V}}{\text{m}},$$

$$E_{сл} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_т = 70\ \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

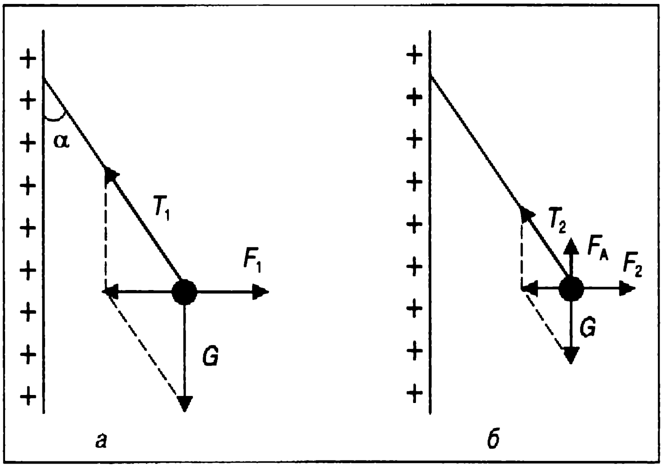


Фиг. 1.31

1.44. До вертикална равномерно заредена равнина на безтегловна непроводяща нишка е окачено малко топче, заредено едноименно с равнината (фиг. 1.32). При запълване на пространството с течност с плътност ρ_0 и диелектрична проницаемост ε положението на топчето не се променя. Намерете плътността на материала, от който е направено топчето.



Фиг. 1.32



Фиг. 1.33

Забележка. Електричното поле, което създава заредената равнина, е еднородно.

Дадено: ρ_0, ε

Да се намери: ρ

Решение

На фиг. 1.33, *а* са показани силите, които действат на топчето преди, а на фиг. 1.33, *б* – след запълване на пространството с течност. В първия случай равнодействащата на силите T_1 и G уравновесява силата F_1, с която електричното поле, създадено от равнината, действа на зареденото топче. Аналогично във втория случай равнодействащата на силите T_2 и $G - F_A$ уравновесява F_2, където F_A е Архимедовата сила. На фиг. 1.34 са показани триъгълниците, които се получават при събирането на силите. Тези триъгълници са подобни. Тогава

$$\frac{F_1}{G} = \frac{F_2}{G - F_A}.$$

Да означим с q заряда на топчето, а с m – неговата маса. Тогава

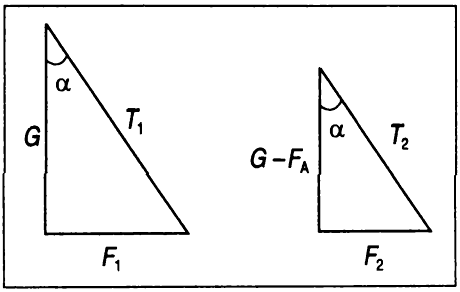
$$G = mg = \rho g V,$$

$$F_A = \rho_0 g V,$$

където V е обемът на топчето. От друга страна,

$$F_1 = qE_0,$$

$$F_2 = qE = \frac{qE_0}{\varepsilon}.$$



Фиг. 1.34

Тук E_0 е интензитетът на електричното поле, създадено от равнината във вакуум, а E – интензитетът на полето в течността, и е отчетено, че

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}.$$

Тогава

$$\frac{qE_0}{\rho Vg} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{qE_0}{\rho gV - \rho_0 gV},$$

откъдето след съкращаване получаваме

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\rho - \rho_0},$$

$$\rho = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\rho_0.$$

Задачи

1.45. Две еднакви успоредни метални пластини с малка дебелина са разположени една от друга на разстояние, много по-малко от линейните им размери. Лявата пластина има заряд q, а дясната – $3q$.

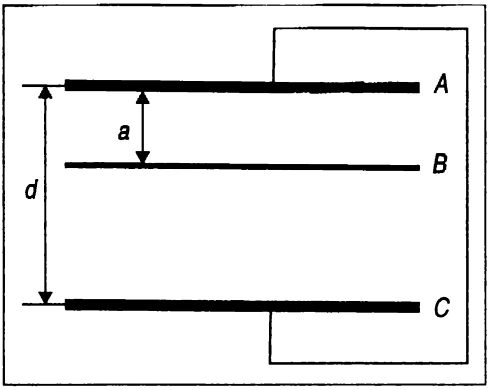
а) Определете заряда на всяка от четирите повърхности на пластините.

б) Начертайте силовите линии на електростатичното поле.

** **1.46.** Две еднакви успоредни тънки метални пластини A и C се намират на разстояние d, малко в сравнение с размерите им, и са свързани с тънък проводник. Трета пластина B, еднаква с първите две, има заряд q и се намира на разстояние a от пластината A (фиг. 1.35).

а) Намерете напрежението между пластините A и B.

б) Определете заряда, който ще премине по тънкия проводник, ако заредената пластина се извади.

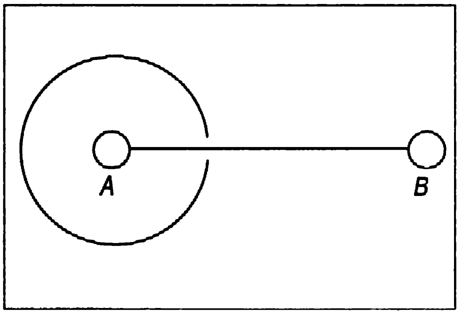


Фиг. 1.35

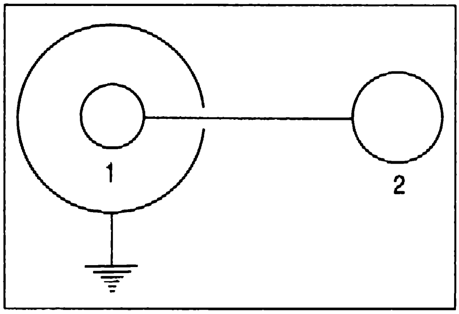
1.47. Тънка метална сфера е разположена в друга тънка метална сфера. Центровете на сферите съвпадат и всяка от тях има положителен заряд $q = 2$ mC. Определете зарядите на външната и вътрешната повърхност на сферата с по-голям радиус.

1.48. Две метални топчета имат еднакви заряди и потенциали съответно 40 V и 60 V. Намерете потенциала на топчетата, ако те се свържат с тънък проводник. Разстоянието между топчетата е голямо в сравнение с техните радиуси.

** **1.49.** Метална сфера с радиус R и неголям отвор има положителен заряд q. Металните топчета A и B, всяко с радиус r, са съединени с тънък проводник и са разположени, както е показано на фиг. 1.36. Разстоянието между A и B е много по-голямо от радиуса на сферата. Намерете зарядите, индуцирани върху топчетата.



Фиг. 1.36



Фиг. 1.37

**** 1.50.** Две метални топчета съответно с радиуси r_1 и r_2 са свързани с дълъг тънък проводник и общият им заряд е q. Топчето с радиус r_1 се поставя в метална заземена сфера с радиус $r = 3r_1$ (фиг. 1.37). Определете заряда, преминал по тънкия проводник.

1.51. Два еднакви заряда се намират в машинно масло на разстояние l = 6 cm един от друг. Те си взаимодействат със сила F = 4 μN. Определете големината на всеки заряд.

1.52. Определете силата на взаимодействие между два заряда q_1 = 60 nC и q_2 = 10 μC във вода, ако разстоянието между тях е R = 3 cm. На какво разстояние един от друг трябва да се намират зарядите във вакуум, за да взаимодействат със същата сила?

1.53. Две еднакви заредени топчета са окачени на нишки с равни дължини и са потопени в течност. Определете плътността на материала, от който са направени топчетата, ако след потапянето ъгълът между нишките не се променя. Диелектричната проницаемост на течността е $\varepsilon = 3$, а плътността ѝ е $\rho_0 = 0{,}8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

**** 1.54.** Две успоредни тънки метални пластини се намират на разстояние d една от друга. Разстоянието между тях е запълнено с диелектрик с проницаемост ε. Зарядът на едната пластина е q_1, а на другата – q_2. Определете разликата между потенциалите $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ на пластините, ако площта на всяка от тях е S.

Кондензатори

Кондензаторите са устройства, състоящи се от два метални проводника (електроди), които се намират на разстояние един от друг. Кондензаторите имат свойството да задържат и натрупват електричен заряд при подадено напрежение между електродите. Капацитет C на кондензатор се нарича величината, равна на отношението между заряда q и напрежението U между двата електрода на кондензатора

$$C = \frac{q}{U}.$$

Капацитетът на плосък кондензатор без диелектрик (или с диелектрик въздух) е

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d},$$

където S е площта на всеки от електродите, а d – разстоянието между тях.

Присъствието на диелектрична среда между електродите увеличава капацитета на кондензатора ε пъти, където ε е диелектричната проницаемост на средата.

Капацитетът на успоредно свързани кондензатори се пресмята по формулата

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots,$$

а на последователно свързани – по формулата

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots .$$

При смесено свързване тези формули се прилагат за отделни еднотипни участъци от веригата.

Всеки зареден кондензатор притежава енергия

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Когато капацитетът се променя, зарядът върху електродите, напрежението между тях и енергията на кондензатора също се променят в зависимост от условията. Възможни са два случая. Ако кондензаторът е зареден и изключен от източника на напрежение, зарядът върху електродите е постоянен. Промяната на капацитета в този случай води до промяна на напрежението между електродите. Когато кондензаторът е включен към източник, напрежението между електродите му е постоянно. В този случай промяната на капацитета води до промяна на заряда.

ПРИМЕРИ

1.55. Кондензатор 1 с капацитет C_1 се свързва чрез ключ K първоначално към батерия с ЕДН $\mathcal{E}$, а след това към незареден кондензатор 2 с капацитет C_2 (фиг. 1.38). Определете заряда q_2, който ще се натрупа върху електродите на кондензатора 2.

Дадено: $\mathcal{E}$, C_1, C_2
Да се намери: q_2
Решение

Когато ключът K е поставен в положение A, кондензаторът 1 се зарежда и зарядът му е

$$q = C_1\mathcal{E}.$$

Когато ключът K е в положение B, започва преразпределение на заряда. Върху кондензатор 1 остава заряд q_1, а върху кондензатор 2 се натрупва заряд q_2, като

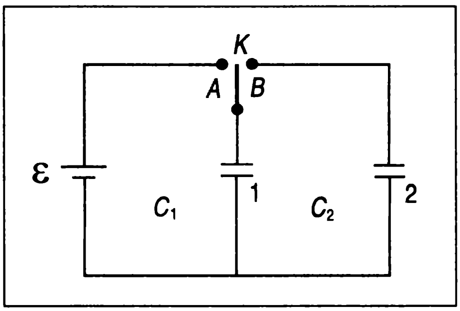
$$q_1 + q_2 = q.$$

Това преразпределение продължава до изравняване на напрежението $U_1 = \frac{q_1}{C_1}$ с $U_2 = \frac{q_2}{C_2}$, т.е.

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}.$$

Като отчетем, че

$$q_1 = q_2\frac{C_1}{C_2},$$



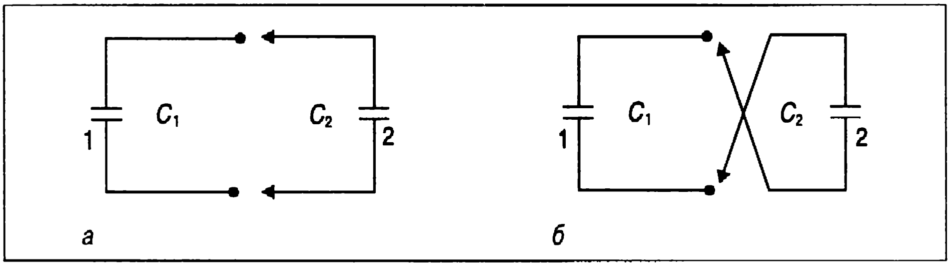
Фиг. 1.38

след заместване получаваме

$$q_2 \frac{C_1}{C_2} + q_2 = q,$$

$$q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \mathcal{E}.$$

1.56. Кондензатор 1 с капацитет $C_1 = 0{,}6\ \mu F$ се зарежда от батерия с ЕДН $\mathcal{E} = 12\ V$ и след това се свързва с незареден кондензатор 2 с капацитет $C_2 = 0{,}4\ \mu F$ (фиг. 1.39, *а*). След това електродите на кондензатор 2 се откачват и отново се свързват, но с разноименните електроди на кондензатор 1 (фиг. 1.39, *б*). Намерете напрежението между електродите на кондензаторите.



Фиг. 1.39

Дадено: $C_1 = 0{,}6\ \mu F$, $C_2 = 0{,}4\ \mu F$, $\mathcal{E} = 12\ V$
Да се намери: U
Решение

Съгласно с решението на пример 1.55 в случая а) кондензатор 1 има заряд

$$q_1 = \frac{C_1^2}{C_1 + C_2} \mathcal{E},$$

а кондензатор 2 – заряд

$$q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \mathcal{E}.$$

При повторното свързване се наблюдава частично компенсиране на заряда. Зарядът

$$q' = q_1 - q_2$$

се преразпределя между двата кондензатора, като

$$q_1' + q_2' = q',$$

като напрежението между електродите им е

$$U = \frac{q_1'}{C_1} = \frac{q_2'}{C_2}.$$

Като отчетем, че

$$q_1' = q_2' \frac{C_1}{C_2},$$

след заместване намираме

$$\frac{q_2'}{C_2}(C_1+C_2)=q'=\frac{C_1(C_1-C_2)}{C_1+C_2}\mathcal{E}.$$

Следователно

$$U=\frac{C_1(C_1-C_2)}{(C_1+C_2)^2}\mathcal{E}=1{,}44\ \text{V}.$$

1.57. Разстоянието между електродите на плосък кондензатор се увеличава. Как ще се промени:

а) капацитетът на кондензатора;

б) напрежението между електродите;

в) интензитетът на електричното поле?

Разгледайте случаите, при които:

1) кондензаторът е зареден и изключен от източника на напрежение;

2) кондензаторът е включен към източника на напрежение.

Решение

а) По определение капацитетът C на плосък кондензатор е

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d},$$

където d е разстоянието между пластините му. При увеличаване на d капацитетът C намалява независимо дали кондензаторът е включен, или не е включен към източник на напрежение.

б) Между заряда q на кондензатора, капацитета му C и напрежението U между електродите е в сила зависимостта

$$q=CU.$$

Когато кондензаторът е зареден и изключен от източника, зарядът му q остава постоянен при промяна на разстоянието между плочите. Тогава

$$q=CU=C'U'=\text{const},$$

където C' и U' са капацитетът и напрежението след увеличаване на разстоянието между електродите. Тъй като $C>C'$, следва $U<U'$, т.е. при изключен от източника кондензатор напрежението се увеличава.

Във втория случай, когато плоският кондензатор остава включен към източника на напрежение, при увеличаване на разстоянието между пластините му напрежението не се променя и $U=U'$. Тъй като $C>C'$, следва $q>q'$, т.е. зарядът на кондензатора намалява.

в) В плосък кондензатор електричното поле е еднородно и интензитетът му E е пропорционален на заряда, който го създава, т.е. на заряда на кондензатора.

При зареден и изключен кондензатор раздалечаването на електродите не води до изменение на заряда и следователно $E=E'$.

Във втория случай напрежението U е едно и също и при раздалечаване на пластините имаме

$$q=CU,\quad q'=C'U.$$

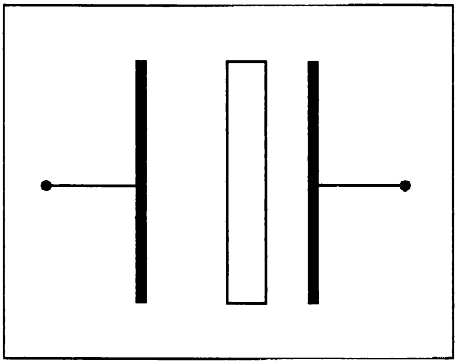
Тъй като $C>C'$, следва $q>q'$. Тогава

$$E>E'.$$

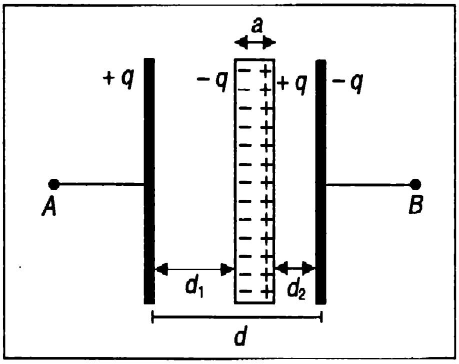
1.58. Успоредно на електродите на плосък кондензатор с капацитет C_0 се поставя пластина с дебелина, равна на $k = \frac{1}{4}$ част от разстоянието между тях, и с площ, равна на площта на електродите (фиг. 1.40). Определете капацитета C на кондензатора, когато:

а) пластината е метална;

б) пластината е от диелектрик с проницаемост ε.



Фиг. 1.40



Фиг. 1.41

Дадено: C_0, $k = \frac{1}{4}$, ε

Да се намери: C

Решение

а) В случая на метална пластина, когато се подаде напрежение между електродите, върху нея се индуцира електричен заряд (фиг. 1.41), като интензитетът на електричното поле в нея е нула. Кондензаторът може да се замени с еквивалентната схема на два последователно свързани кондензатора (фиг. 1.42) съответно с капацитети

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2},$$

където S е площта на всеки електрод. Капацитетът C на батерията от двата кондензатора е

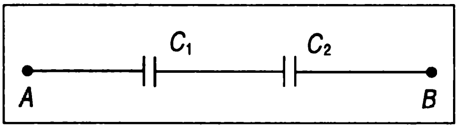
$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1 + d_2}.$$

Като отчетем, че

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \quad d_1 + d_2 = d - a,$$

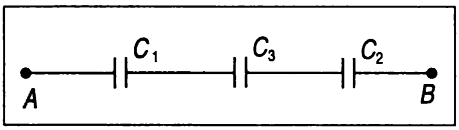
намираме

$$C = C_0 \frac{d}{d-a} = C_0 \frac{1}{1 - \frac{a}{d}} = \frac{C_0}{1-k} = \frac{4}{3} C_0.$$



Фиг. 1.42

б) В случая на диелектрична пластина електричното поле в нея е различно от нула. Еквивалентната схема на кондензатора е показана на фиг. 1.43, където



Фиг. 1.43

$$C_3 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{a} = \varepsilon\frac{d}{a}C_0 = \frac{\varepsilon}{k}C_0.$$

Капацитетът C на кондензатора е

$$C = \frac{C'C_3}{C'+C_3},$$

където

$$C' = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = \frac{C_0}{1-k}.$$

След заместване намираме

$$C = \frac{\frac{C_0}{1-k}\cdot\frac{\varepsilon C_0}{k}}{\frac{C_0}{1-k}+\frac{\varepsilon C_0}{k}} = \frac{\varepsilon C_0}{\varepsilon(1-k)+k} = \frac{4\varepsilon C_0}{3\varepsilon+1}.$$

Коментар. Решението на задачата показва, че капацитетът на кондензатора не зависи от мястото на поставяне на пластината, а единствено от отношението на дебелината a на пластината и разстоянието d между електродите на плоския кондензатор.

1.59. Кондензатор с неизвестен капацитет C_1 е зареден до напрежение $U_1 = 80$ V, а друг кондензатор с капацитет $C_2 = 60$ μF е зареден до напрежение $U_2 = 16$ V. Ако свържем успоредно кондензаторите с едноименно заредените им електроди, напрежението на получената батерия от кондензатори е $U = 20$ V.

а) Определете капацитета C_1.

б) Какво ще бъде напрежението U' на батерията от успоредно свързани кондензатори, ако съединим разноименно заредените им електроди?

Дадено: $U_1 = 80$ V, $U_2 = 16$ V, $U = 20$ V, $C_2 = 60$ μF

Да се намери: C_1

Решение

На фиг. 1.44 е показано успоредното свързване на кондензаторите с едноименните им електроди. Общият заряд $q = q_1 + q_2$, който е сума от началните заряди на кондензаторите q_1 и q_2, не се променя. При успоредно свързване капацитетът на батерията е

$$C = C_1 + C_2,$$

а общият заряд –

$$q = CU = (C_1 + C_2)U.$$

Като отчетем, че

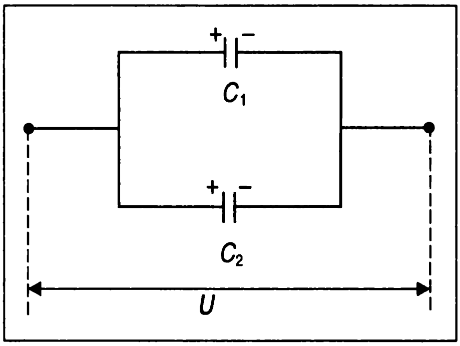
$$q_1 = C_1U_1, \quad q_2 = C_2U_2,$$

и заместим тези изрази за q, q_1, и q_2, намираме

$$(C_1 + C_2)U = C_1U_1 + C_2U_2,$$

откъдето следва

$$C_1 = \frac{U-U_2}{U_1-U}C_2 = 4\ \mu\text{F}.$$



Фиг. 1.44

б) на фиг. 1.45 е показано успоредно свързване на заредените кондензатори чрез разноименните им електроди. Тъй като

$$q_1 = C_1U_1 = 320\ \mu C,$$

$$q_2 = C_2U_2 = 960\ \mu C,$$

т.е.

$$q_2 > q_1.$$

Зарядът на батерията ще бъде

$$q' = q_2 - q_1.$$

Тогава, като отчетем, че

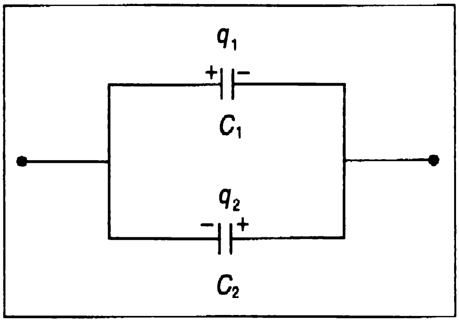
$$q' = (C_1 + C_2)U',$$

$$q_1 = C_1U_1,$$

$$q_2 = C_2U_2,$$

намираме

$$U' = \frac{C_2U_2 - C_1U_1}{C_1 + C_2} = 10\ V.$$



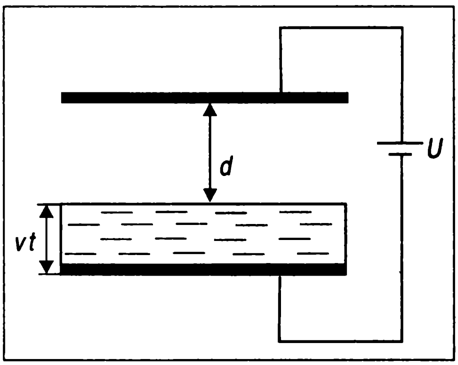
Фиг. 1.45

1.60. Плосък въздушен кондензатор с хоризонтално разположени електроди е свързан към източник на напрежение U и е поставен в съд, който постепенно се запълва с течност с диелектрична проницаемост ε (фиг. 1.46). Нивото на течността се издига равномерно със скорост v. Намерете зависимостта на интензитета E на електричното поле във въздушния слой на кондензатора от времето t.

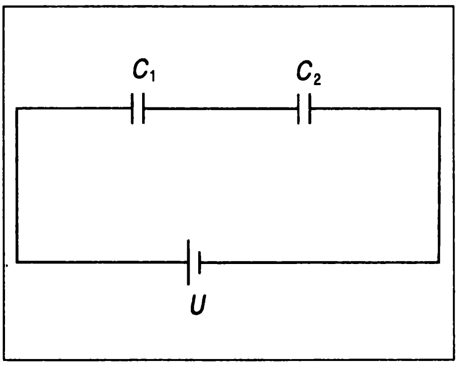
Дадено: U, d, v, ε
Да се намери: $E(t)$
Решение

В момента t, когато дебелината на слоя течност е vt кондензаторът може да се представи като два последователно свързани (фиг. 1.47) кондензатора с капацитети съответно C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{vt}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - vt}.$$



Фиг. 1.46



Фиг. 1.47

Натрупаните върху кондензаторите заряди са равни (последователно свързване)

$$q = C_1U_1 = C_2U_2,$$

където

$$U_1 + U_2 = U.$$

Тогава

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1}U_2.$$

След като заместим U_1 с този израз, намираме

$$U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}U.$$

Тук с U_2 е означено напрежението между електродите на кондензатора с въздушен слой. Тъй като електричното поле е хомогенно, то има интензитет

$$E(t) = \frac{U_2}{d - vt}.$$

Като заместим U_2, C_1 и C_2, получаваме

$$E(t) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon d - vt(\varepsilon - 1)}U.$$

В началния момент $E(0) = \frac{U}{d}$. При запълване на кондензатора, тъй като $\varepsilon > 1$, имаме

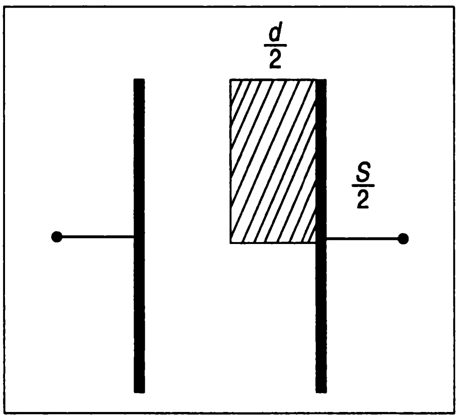
$$E(t) = \frac{U}{d - vt\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}} > \frac{U}{d} = E(0).$$

Интензитетът на електричното поле във въздушния слой нараства с времето. Това може да доведе до пробив на кондензатора.

1.61. В плосък въздушен кондензатор с капацитет C_0 се поставя пластина с диелектрична проницаемост ε, както е показано на фиг. 1.48.

а) Намерете капацитета C на кондензатора с пластината.

б) Кондензатор с какъв капацитет C_x трябва да се свърже с кондензатора с капацитет C и по какъв начин, за да има батерията капацитет C_0?



Фиг. 1.48

Дадено: C_0, ε

Да се намери: C, C_x

Решение

а) Когато на кондензатора с диелектрична пластина се подаде напрежение, тя се поляризира и по стените, успоредни на пластините, се появява заряд. Електричното поле в двата сектора (с диелектрик и без диелектрик) остава хомогенно и разглежданият кондензатор може да се замени с три кондензатора, свързани по начина, показан на фиг. 1.49. Тук

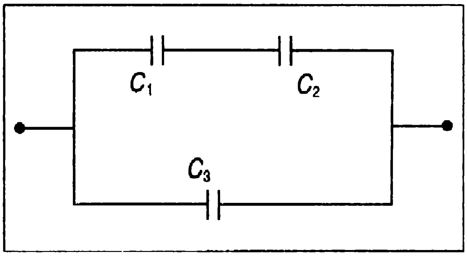
$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S/2}{d/2} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = C_0,$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S/2}{d/2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} = \varepsilon C_0,$$

$$C_3 = \frac{\varepsilon_0 S}{d/2} = 2\frac{\varepsilon_0 S}{d} = 2C_0,$$

където е отчетено, че

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

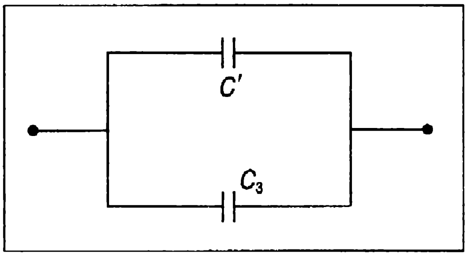


Фиг. 1.49

Пресмятането на капацитета става на два етапа чрез последователно опростяване на схемата. Първо намираме капацитета C' на двата последователно свързани кондензатора

$$C' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}C_0.$$

След това намираме капацитета C като капацитет на двата успоредно свързани кондензатора (фиг. 1.50):



Фиг. 1.50

$$C = C' + C_3 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}C_0 + 2C_0 = \frac{3\varepsilon+1}{2(\varepsilon+1)}C_0.$$

б) За да определим начина на свързване, трябва да сравним C с C_0. Ако $C < C_0$, кондензаторът C_x трябва да се свърже успоредно на C – така капацитетът на батерията от кондензатори нараства. Ако $C > C_0$, свързването трябва да е последователно, защото капацитетът на батерията в този случай ще бъде по-малък както от C, така и от C_x.

Стойността на C зависи от множителя $\frac{3\varepsilon+1}{2(\varepsilon+1)}$. Той може да бъде по-голям, по-малък или равен на единица. Да допуснем, че

$$\frac{3\varepsilon+1}{2(\varepsilon+1)} > 1.$$

След преобразуване получаваме

$$\varepsilon > 1,$$

което е вярно за всички възможни стойности на диелектричната проницаемост.

Следователно $C > C_0$ и свързването на C_x с C е последователно. Тогава

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_x},$$

$$C_x = \frac{C_0 C}{C - C_0} = \frac{3\varepsilon+1}{\varepsilon-1}C_0.$$

1.62. Колко пъти ще се измени енергията на зареден въздушен кондензатор, ако пространството между пластините му се запълни с парафин ($\varepsilon = 2$)? Разгледайте два случая:

а) кондензаторът е зареден и изключен от източника;

б) кондензаторът остава свързан с източника на напрежение.

Дадено: $\varepsilon = 2$

Да се намери: $\frac{W_2}{W_1}$

Решение

а) Когато кондензаторът е зареден и изключен от източника, при поставяне на диелектрик зарядът q остава постоянен, но капацитетът $C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ се променя на $C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} = \varepsilon C_1$. Тогава

$$W_1 = \frac{q^2}{2C_1}, \quad W_2 = \frac{q^2}{2C_2} = \frac{q^2}{2\varepsilon C_1} = \frac{1}{\varepsilon} W_1$$

и получаваме

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{2}.$$

Енергията на изключен от източника кондензатор намалява $\varepsilon = 2$ пъти след поставяне на диелектрик.

б) В този случай напрежението между електродите на кондензатора е постоянно, а C_1 се променя и става $C_2 = \varepsilon C_1$ след поставяне на диелектрик. Тогава

$$W_1 = \frac{C_1 U^2}{2}, \quad W_2 = \frac{C_2 U^2}{2} = \frac{\varepsilon C_1 U^2}{2} = \varepsilon W_1$$

и получаваме

$$\frac{W_2}{W_1} = \varepsilon.$$

Енергията на кондензатора се увеличава $\varepsilon = 2$ пъти.

1.63. Два кондензатора с капацитети съответно $C_0 = 1$ μF и C_x (променлив) са свързани последователно един на друг. Те са включени към източник на напрежение $U = 20$ V. При каква стойност на C_x енергията на този кондензатор ще бъде максимална? Определете стойността ѝ W_{max}.

Дадено: $C_0 = 1$ μF, $U = 20$ V

Да се намери: C_x, W_{max}

Решение

На фиг. 1.51 е показана веригата със свързаните кондензатори. Енергията на кондензатора с променлив капацитет C_x е

$$W = \frac{C_x U_x^2}{2}.$$

Тъй като при последователно свързване кондензаторите имат еднакъв заряд

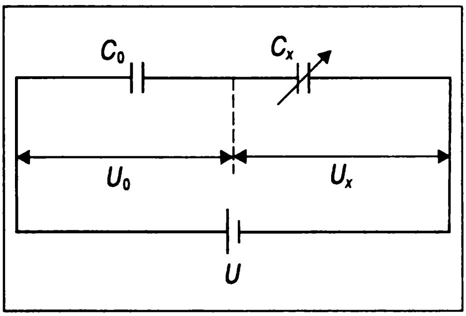
$$C_0 U_0 = C_x U_x.$$

Освен това

$$U_0 + U_x = U.$$

От двете уравнения намираме

$$U_x = \frac{C_0}{C_0 + C_x} U.$$



Фиг. 1.51

Тогава

$$W = \frac{C_x C_0^2 U^2}{2(C_0 + C_x)^2} = \frac{C_0 U^2}{2} \frac{x}{(1+x)^2} = W_0 \frac{x}{(1+x)^2},$$

където $x = \frac{C_x}{C_0}$, $W_0 = \frac{C_0 U^2}{2} = \text{const}$.

Енергията на кондензатора с капацитет C_x зависи от отношението x. Нека означим

$$\frac{x}{(1+x)^2} = a.$$

Тогава x удовлетворява квадратното уравнение

$$ax^2 - (1-2a)x + a = 0,$$

чиито решения са

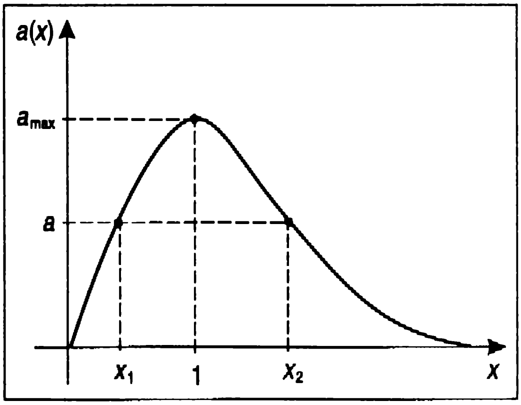
$$x_{1,2} = \frac{(1-2a) \pm \sqrt{1-4a}}{2a}$$

при $a \leq \frac{1}{4}$. Следователно $a_{max} = \frac{1}{4}$ и тя се получава при $x_0 = 1$. Кондензаторът с капацитет C_x има максимална енергия, когато

$$C_x = C_0 = 1\ \mu\text{F}$$

и тя е

$$W_{max} = \frac{1}{4} W_0 = \frac{1}{8} C_0 U^2 = 50\ \mu\text{J}.$$

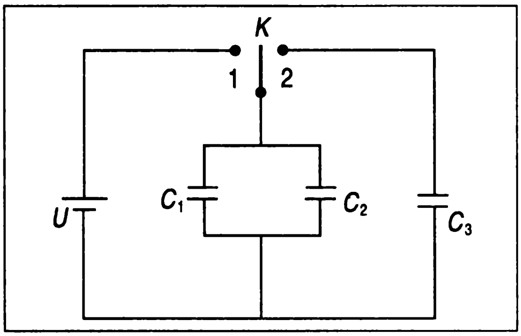


Фиг. 1.52

Коментар. Графиката на $a(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ е показана на фиг. 1.52. Интересен е резултатът, че при $a < a_{max}$ a има една и съща стойност при две различни стойности на $x - x_1 < 1$ и $x_2 > 1$. Първата съответства на $C_x < C$, а втората – на $C_x > C$.

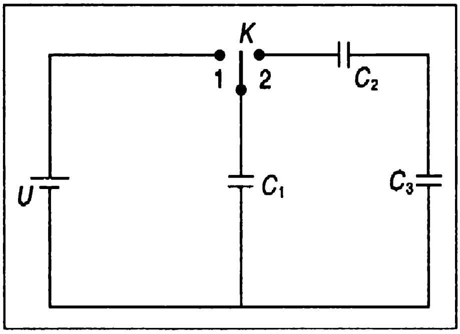
*Задачи

1.64. Батерия от успоредно свързани кондензатори с капацитети съответно $C_1 = 1\ \mu\text{F}$ и $C_2 = 2\ \mu\text{F}$ (фиг. 1.53) първоначално се свързва към източник с напрежение $U = 6$ V, като ключът K се поставя в положение 1. След това ключът K се поставя в положение 2 и заредената батерия от кондензатори се свързва с кондензатор с капацитет $C_3 = 3\ \mu\text{F}$. Намерете заряда на всеки от кондензаторите.



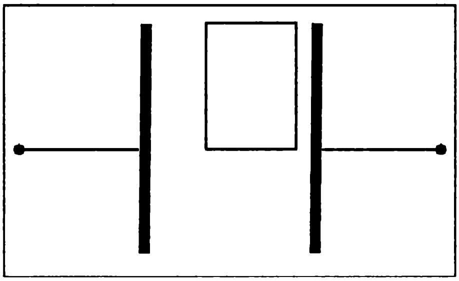
Фиг. 1.53

1.65. Кондензатор с капацитет $C_1 = 2\ \mu F$ се включва към източник с напрежение $U = 6$ V (фиг. 1.54) чрез поставяне на ключа K в положение 1. След зареждането на кондензатора ключът K се поставя в положение 2. Намерете заряда и напрежението между електродите на всеки кондензатор, ако $C_2 = 2\ \mu F$ и $C_3 = 1\ \mu F$.

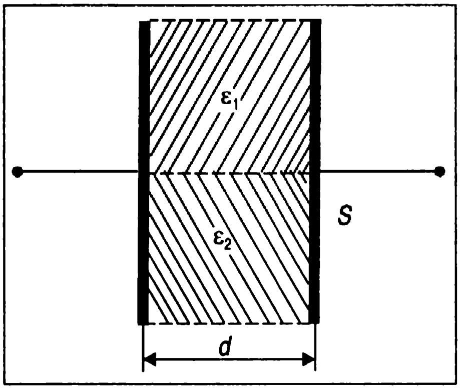


Фиг. 1.54

1.66. Успоредно на електродите на плосък въздушен кондензатор с капацитет C_0 се поставя метална пластина с дебелина, равна на половината от разстоянието между електродите, и площ, два пъти по-малка от площта им. Намерете капацитета C на кондензатора (фиг. 1.55).


Фиг. 1.55

1.67. Пространството между електродите на плосък кондензатор с площ S и разстояние между тях d е запълнено с диелектрик, състоящ се от две половини с равни размери, но с различни диелектрични проницаемости ε_1 и ε_2 (фиг. 1.56). Намерете капацитета C на този кондензатор.



Фиг. 1.56

★★ **1.68.** Пространството между хоризонтално разположените електроди на плосък кондензатор е запълнено до половината с течен диелектрик с проницаемост ε. Каква част от пространството трябва да се запълни със същия диелектрик при вертикално положение на електродите, за да има кондензаторът един и същ капацитет в двата случая?

1.69. Пространството между хоризонтално разположените електроди на плосък въздушен кондензатор е запълнено до половината с течен парафин с проницаемост $\varepsilon = 2$. Разстоянието между пластините се намалява така, че кондензаторът се оказва изцяло запълнен с течен парафин. Как ще се измени:

а) капацитетът на кондензатора;

б) напрежението между електродите му;

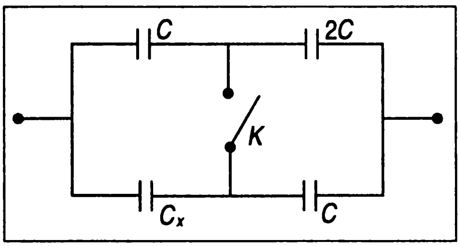
в) енергията на кондензатора?

Разгледайте случаите, при които:

1) кондензаторът е зареден и изключен от източника на напрежение, преди пластините да се приближат една към друга;

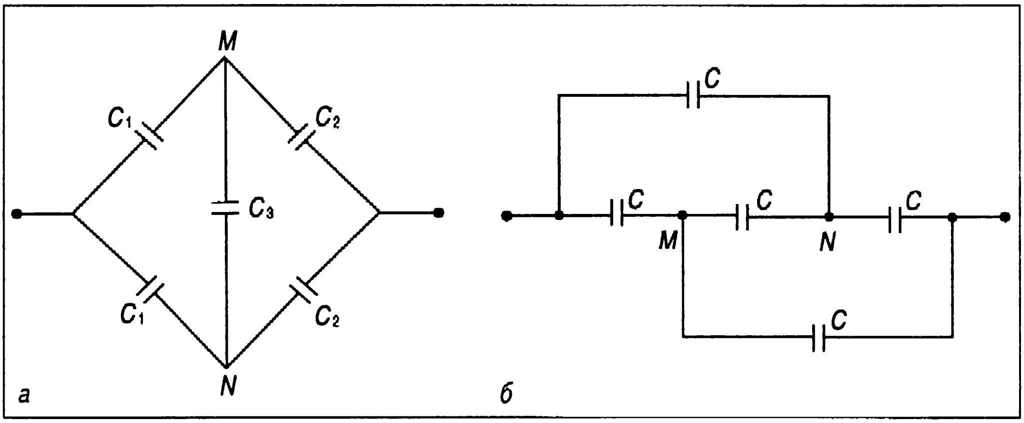
2) кондензаторът остава включен към източника на напрежение.

★★ **1.70.** В схемата, показана на фиг. 1.57, капацитетът на батерията от кондензатори не се изменя при затваряне на ключа K. Намерете капацитета C_x, ако $C = 40$ pF.



Фиг. 1.57

1.71. Намерете капацитета на батериите от кондензатори, показани на фиг. 1.58.



Фиг. 1.58

** **1.72.** Кондензатор с капацитет C_1 = 2 μF е зареден до напрежение U_1 = 100 V, а кондензатор с капацитет C_2 = 0,5 μF – до напрежение U_2 = 50 V. Кондензаторите се свързват с едноименните си електроди. Определете енергията, преобразувана в топлина, при свързването на кондензаторите.

** **1.73.** Плосък въздушен кондензатор с капацитет C = 20 nF е зареден до напрежение U = 100 V. Каква минимална работа трябва да се извърши, за да се увеличи разстоянието между пластините два пъти, ако:

а) кондензаторът е зареден и изключен от източника;

б) кондензаторът остава включен към източника.

ПОСТОЯНЕН ЕЛЕКТРИЧЕН ТОК

Електрически вериги. Закони на Ом

Насоченото движение на заредени частици (електрони или йони) се нарича електричен ток. Ако през напречното сечение на проводник за интервал време Δt преминава заряд Δq, токът е

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Когато през два последователни интервала Δt преминават еднакви заряди $\Delta q_1 = \Delta q_2$, токът е постоянен. В случай че за равни последователни интервали Δt преминават различни заряди $\Delta q_1 \neq \Delta q_2$, токът се променя с времето.

При подаване на напрежение U между краищата на метален проводник (резистор) по него протича ток I, който е пропорционален на приложеното напрежение (закон на Ом):

$$I = \frac{1}{R}U, \quad U = IR, \quad R = \frac{U}{I} = \text{const}.$$

Тук R е съпротивлението на резистора, което зависи от свойствата на проводника и неговите геометрични размери. За цилиндричен проводник

$$R = \rho\frac{l}{S},$$

където l е дължината на проводника, S – напречното му сечение, а ρ – специфичното съпротивление.

В електрическите вериги резисторите могат да бъдат свързвани последователно, успоредно и смесено.

При **последователно свързване** на n резистори са в сила следните зависимости:

$$I_1 = I_2 = \ldots = I_n = I;$$

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n = U;$$

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n.$$

При **успоредно свързване** на n резистори:

$$I_1 + I_2 + \ldots + I_n = I;$$

$$U_1 = U_2 = \ldots = U_n = U;$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}.$$

При решаването на задачи, в които се определя еквивалентното съпротивление R на сложни вериги, е необходимо да се използва следният алгоритъм.

1. Начертава се схемата на веригата.
2. Определя се кои групи резистори са свързани последователно и кои успоредно.
3. Схемата се опростява, като всяка група от последователно или успоредно свързани резистори се заменя с един резистор със съпротивление, равно на еквивалентното им. При необходимост тази операция се повтаря няколко пъти.

За да протича електричен ток в затворена верига, в нея трябва да е включен източник на напрежение. Всеки реален източник има две характеристики – електродвижещо напрежение (ЕДН) $\mathcal{E}$ и вътрешно съпротивление r. При свързване на резистор със съпротивление R към източника във веригата протича ток I, който се определя от закона на Ом за цялата верига:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

Напрежението U между краищата на резистора или между клемите на източника е

$$U = \mathcal{E} - Ir.$$

В задачите, където $R \gg r$, вътрешното съпротивление на източника може да не се отчита и тогава $U \approx \mathcal{E}$.

ПРИМЕРИ

1.74. Какъв електричен заряд преминава през сечението на проводник за 10 s, ако електричният ток:

а) е постоянен и равен на 2 A;

б) равномерно нараства от нула до 2 A?

Като използвате графиката на зависимостта на тока I от времето t, направете геометрична интерпретация на преминалия заряд в двата случая.

Дадено: $I = 2$ A, $t = 10$ s

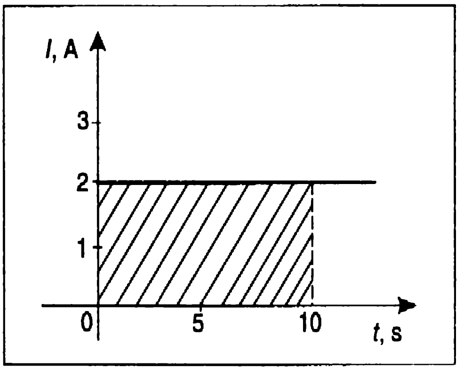
Да се намери: q

Решение

а) При постоянен ток преминалият заряд е

$q = I.t = 20$ C.

На фиг. 1.59 е показана графиката на електричния ток от времето. Лицето на защрихования правоъгълник е числено равно на преминалия заряд q.

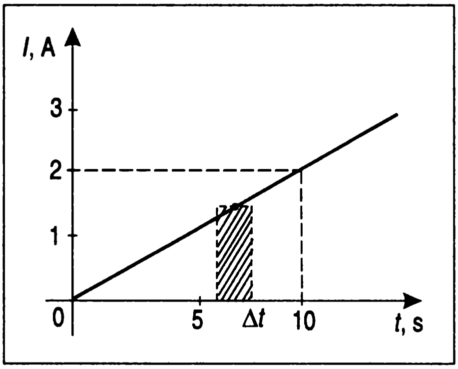


Фиг. 1.59

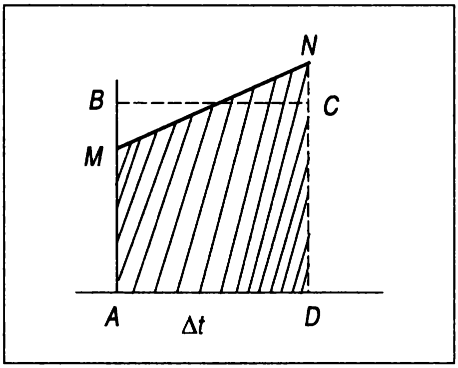
б) В този случай електричният ток се променя с времето. Графиката на зависимостта на тока I от времето t е права линия, минаваща през началото на координатната система и точката $I = 2$ A, $t = 10$ s (фиг. 1.60). За да определим преминалия заряд, ще разсъждаваме по следния начин. Разглеждаме малък интервал от време Δt, през който токът може да се приеме за постоянен. Преминалият заряд е

$$\Delta q \approx I \Delta t$$

и е числено равен на лицето на защрихования правоъгълник (вж. фиг. 1.60). Колкото Δt е по-малко (точките A и D се приближават), толкова лицето на правоъгълника $ABCD$ е по-близко до лицето на трапеца $AMND$ (фиг. 1.61) и преминалият заряд Δq е равен на лицето на трапеца. Пълният заряд q ще намерим, като разделим интервала от 0 s до 10 s на малки равни участъци с дължина Δt, пресметнем заряда Δq за всеки участък и



Фиг. 1.60

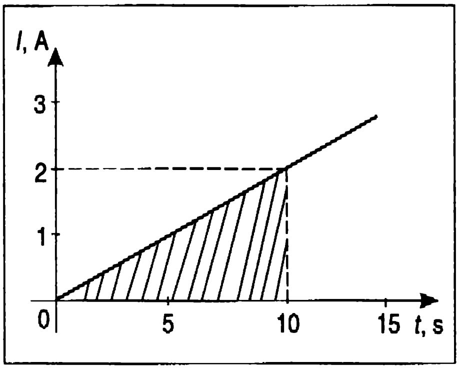


Фиг. 1.61

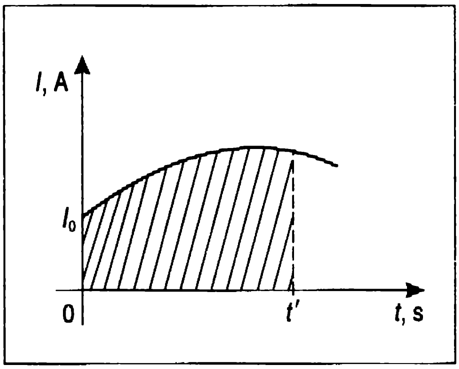
сумираме. Тогава общият заряд q ще бъде числено равен на лицето на защрихования триъгълник от фиг. 1.62, т.е.

$$q = \frac{2\ \text{A}.10\ \text{s}}{2} = 10\ \text{C}.$$

Коментар. Разгледаните два случая дават възможност да се формулира общо правило за намиране на преминалия електричен заряд q за време t' през сечението на проводник за случай на променящ се с времето електричен ток. Първо се построява графика на зависимостта на тока I от времето t. След това се намира лицето на фигурата между графиката и хоризонталната ос (фиг. 1.63).



Фиг. 1.62



Фиг. 1.63

1.75. Плосък кондензатор, чиито електроди са квадратни метални пластини, всяка с площ 400 cm^2 и разстояние между тях 2 mm, е свързан към източник на напрежение 120 V. В пространството между пластините на кондензатора със скорост 10 cm/s се внася пластина с диелектрична проницаемост $\varepsilon = 6$, която запълва цялото пространство. Определете електричния ток във веригата.

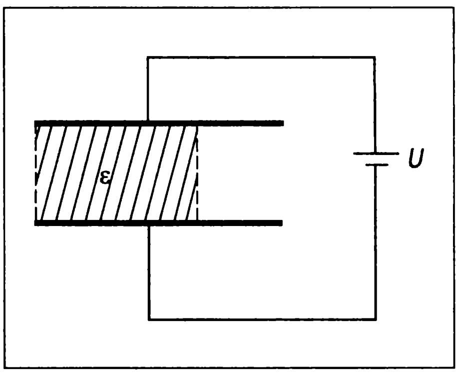
Дадено: $S = 400$ cm^2, $d = 2$ mm, $U = 120$ V, $v = 10$ cm/s, $\varepsilon = 6$

Да се намери: I

Решение

Капацитетът на кондензатора се променя при навлизането на пластината. Тъй като напрежението между електродите му е постоянно и равно на U, зарядът на кондензатора се променя с времето, а това е еквивалентно на протичане на електричен ток във веригата. Ще определим изменението на заряда с времето. Към момента t капацитетът на кондензатора $C(t)$ е еквивалентният капацитет на два успоредно свързани кондензатора (фиг. 1.64)

$$C_1(t) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \sqrt{S} vt}{d}, \quad C_2(t) = \frac{\varepsilon_0 \sqrt{S}(\sqrt{S} - vt)}{d},$$



Фиг. 1.64

като

$$C(t)=C_1(t)+C_2(t)=\frac{\varepsilon_0\sqrt{S}(\varepsilon-1)vt}{d}+\frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Тъй като $C_0=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$ е първоначалният капацитет на кондензатора, изменението му с времето е

$$\Delta C(t)=\frac{\varepsilon_0\sqrt{S}(\varepsilon-1)vt}{d}.$$

Следователно изменението на заряда Δq на кондензатора с времето t е

$$\Delta q=\Delta CU=\frac{\varepsilon_0\sqrt{S}(\varepsilon-1)Uvt}{d}.$$

Този израз показва, че $q\sim t$. Тогава токът

$$I=\frac{\Delta q}{t}=\frac{\varepsilon_0\sqrt{S}(\varepsilon-1)Uv}{d}=66\ \text{nA}.$$

1.76. Метален проводник има съпротивление 20 Ω. Чрез изтегляне дължината му е увеличена 4 пъти. Какво е съпротивлението на обработения проводник?

Дадено: $R=20\ \Omega$, $l'=4l$
Да се намери: R'
Решение

Търсеното съпротивление на проводника е

$$R'=\rho\frac{l'}{S'},$$

където l' е дължината му, а S' – напречното сечение след обработката. Началното съпротивление на проводника е

$$R=\rho\frac{l}{S},$$

откъдето намираме $\rho=\frac{RS}{l}$. Като заместим този израз за ρ в израза за R', получаваме

$$R'=\frac{l'S}{lS'}R.$$

При обработката на металния проводник масата му не се променя. Тъй като плътността е една и съща преди и след обработката, в сила е равенството за обемите

$$V'=V,\quad l'S'=lS.$$

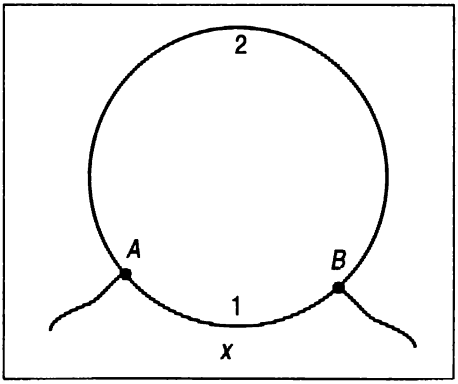
Тогава

$$\frac{S}{S'}=\frac{l'}{l}$$

и след като заместим в израза за R', получаваме

$$R'=\left(\frac{l'}{l}\right)^2 R=16R=320\ \Omega.$$

1.77. От цилиндричен проводник със съпротивление $R = 25\ \Omega$ е направен пръстен. В точките A и B са запоени два тънки проводника (фиг. 1.65), така че съпротивлението между тези две точки е $r = 4\ \Omega$. Определете дължината x от пръстена между A и B.



Фиг. 1.65

Дадено: $R = 25\ \Omega$, $r = 4\ \Omega$, l

Да се намери: x

Решение

Съпротивлението между точките A и B е еквивалентното съпротивление на два успоредно свързани проводника. Първият е с дължина x и сечение S, при което съпротивлението му е

$$R_1 = \rho\frac{x}{S},$$

а вторият е с дължина $l - x$, сечение S и съпротивление

$$R_2 = \rho\frac{l-x}{S}.$$

Тогава

$$R_{AB} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = r.$$

Общото съпротивление на пръстена е съпротивлението на цилиндричния проводник, като

$$R_1 + R_2 = R$$

и

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{x}{l-x}.$$

От тези изрази намираме

$$R_1 = \frac{x}{l}R, \quad R_2 = \frac{l-x}{l}R.$$

Като заместим R_1 и R_2 в израза за R_{AB}, получаваме

$$x(l-x) = \frac{l^2 r}{R}.$$

След като решим квадратното уравнение за x, намираме

$$x = \frac{l}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4r}{R}}\right].$$

Следователно

$$x_1 = 0{,}2l, \quad l - x_1 = 0{,}8l$$

или

$$x_2 = 0{,}8l, \quad l - x_2 = 0{,}2l.$$

Полученият резултат показва, че съпротивлението между двата контакта има нужната стойност от $4\ \Omega$, когато точките A и B разделят пръстена на две дъги, чиито дължини се отнасят както едно към четири.

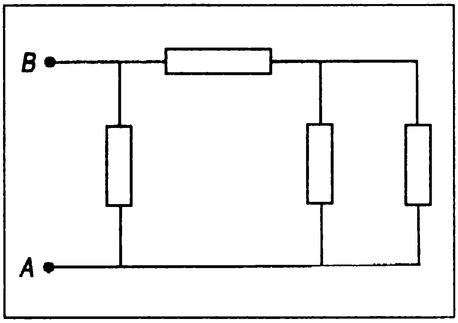
1.78. Четири еднакви резистора, всеки със съпротивление r, са свързани както е показано на фиг. 1.66. Определете еквивалентното съпротивление между A и B.

Дадено: r

Да се намери: R

Решение

Схемата на фиг. 1.66 е пример за смесено свързване, при което част от резисторите са свързани успоредно, а част – последователно. Намирането на еквивалентното съпротивление става чрез постепенно опростяване на схемата.



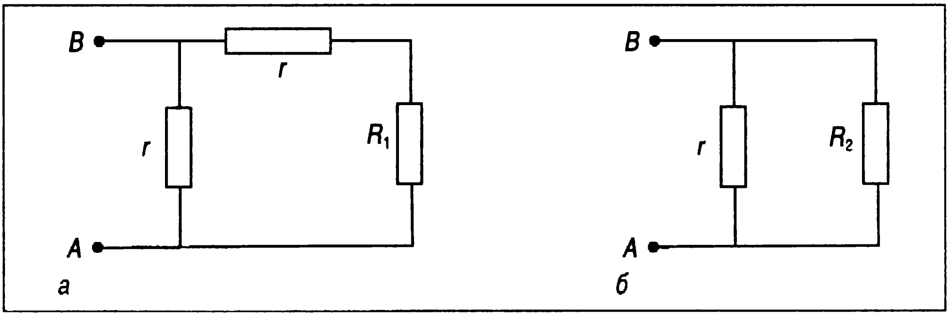
Фиг. 1.66

Първо намираме еквивалентното съпротивление R_1 на двата крайни успоредно свързани резистора

$$R_1 = \frac{r.r}{r+r} = \frac{r}{2}.$$

Опростената схема е показана на фиг. 1.67, *а*. На нея резисторите r и R_1 са последователно свързани и тяхното еквивалентно съпротивление е

$$R_2 = r + R_1 = \frac{3}{2}r.$$



Фиг. 1.67

На фиг. 1.67, *б* схемата вече съдържа само два резистора, които са свързани успоредно. Тогава еквивалентното им съпротивление

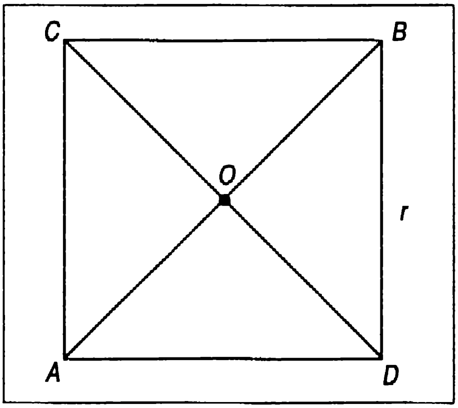
$$R = \frac{rR_2}{r+R_2} = \frac{r.\frac{3}{2}r}{r+\frac{3}{2}r} = \frac{3}{5}r$$

е съпротивлението на веригата между точките A и B.

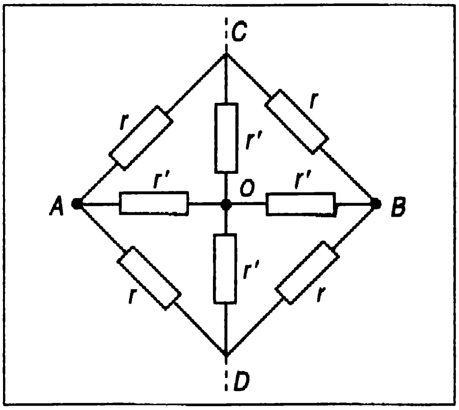
1.79. На метална рамка във вид на квадрат, със споени в центъра диагонали, е подадено напрежение между точките A и B (фиг. 1.68). Определете еквивалентното съпротивление на рамката, ако съпротивлението на страната на квадрата е r.

Дадено: r

Да се намери: R



Фиг. 1.68



Фиг. 1.69

Решение

Тъй като всеки проводник от рамката има определено съпротивление, решението на задачата се свежда до намирането на еквивалентното съпротивление между точките A и B на електрическата верига, показана на фиг. 1.69. Съпротивлението на всеки проводник е пропорционално на дължината му и следователно

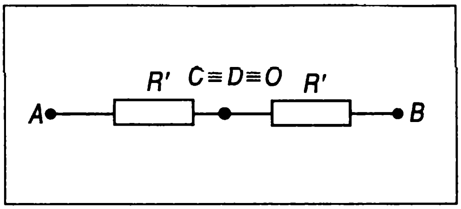
$$r' = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

В така представената верига не е очевиден начинът на свързване (последователно или успоредно) на отделните резистори. За да изясним това, ще разсъждаваме по следния начин. Тъй като схемата е напълно симетрична спрямо правата CD, тя може да се представи във вида на фиг. 1.70. Тогава при подаване на напрежение между A и B напрежението между краищата на всеки от резисторите R' е едно и също. Следователно напрежението между т. A и всяка една от точките C, O и D е едно и също. Това означава, че напрежението между точките C и O, както и между O и D, е нула. През съответните резистори r' ток не протича и те могат да бъдат изключени от схемата, а трите точки да бъдат обединени в една (фиг. 1.71). Следователно съпротивлението

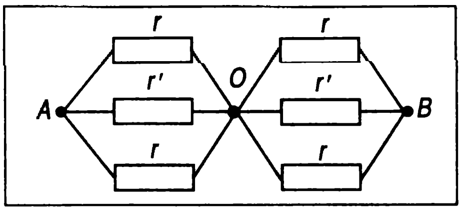
$$R' = \frac{\frac{r}{2}r'}{\frac{r}{2}+r'} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}r,$$

а еквивалентното съпротивление на веригата е

$$R = 2R' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}r.$$

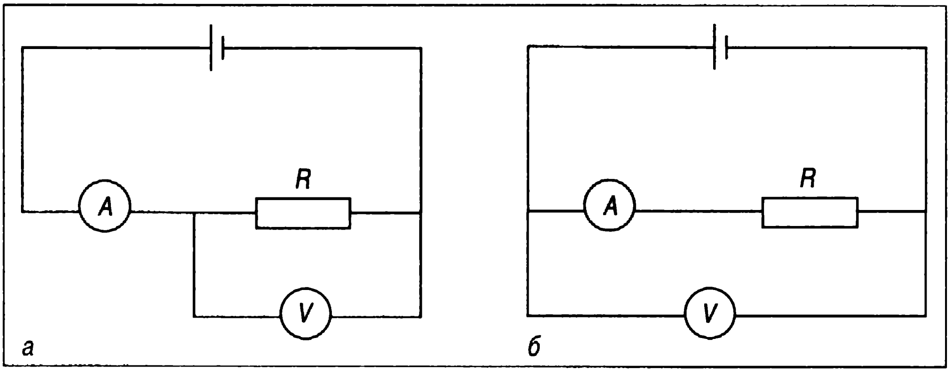


Фиг. 1.70



Фиг. 1.71

1.80. Според закона на Ом за част от веригата съпротивлението R на резистор може да бъде измерено с помощта на амперметър и волтметър по формулата $R = \frac{U}{I}$. На фиг. 1.72, *а*, *б* са показани два варианта на електрическа верига за такова измерване. В първия случай показанията на амперметъра и волтметъра са I_1 и U_1, а във втория – I_2, U_2.



Фиг. 1.72

а) Обяснете защо измерването, извършено само по една от схемите, не дава точен резултат.

б) Определете стойността на неизвестното съпротивление R по показанията на уредите във всяка една от схемите, като отчетете собственото съпротивление r_A на амперметъра и r_V на волтметъра. Намерете техните стойности.

в) Ако не се отчитат собствените съпротивления на уредите, коя от схемите и защо е подходяща за измерване на големи по стойност съпротивления и коя – на малки?

Дадено: I_1, U_1, I_2, U_2

Да се намери: R, r_A, r_V

Решение

а) Според закона на Ом за част от веригата

$$R = \frac{U}{I},$$

където U е напрежението между краищата на резистора, а I – токът, протичащ през него. На фиг. 1.72, *а* се измерва не токът през резистора, а сумата от токовете през резистора и волтметъра. Следователно

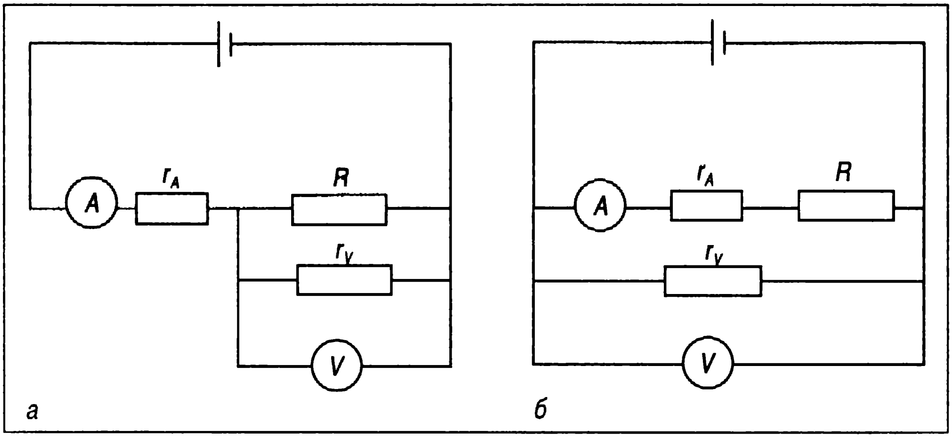
$$R \neq \frac{U_1}{I_1}.$$

На фиг. 1.72, *б* волтметърът измерва напрежението не между краищата на резистора, а на участъка, включващ резистора и амперметъра. Тогава имаме

$$R \neq \frac{U_2}{I_2}.$$

б) Еквивалентните схеми на фиг. 1.72, *а* и фиг. 1.72, *б* с отчитане на собственото съпротивление на амперметъра r_A и волтметъра r_V имат вида, показан на фиг. 1.73. От схемата 1.73, *б* имаме

$$U_2 = I_2(r_A + R).$$



Фиг. 1.73

Тъй като напрежението на източника съвпада с показанието U_2, от схемата 1.73, *а* намираме

$$I_1 r_A + U_1 = U_2.$$

Тогава собственото съпротивление на амперметъра е

$$r_A = \frac{U_2 - U_1}{I_1},$$

а неизвестното съпротивление

$$R = \frac{U_2}{I_2} - r_A = \frac{U_2}{I_2} - \frac{U_2 - U_1}{I_1}.$$

За намиране на собственото съпротивление r_V ще използваме схемата на фиг. 1.73, *а*. Показанието на волтметъра е

$$U_1 = I_1 \frac{R r_V}{R + r_V},$$

откъдето следва

$$r_V = \frac{U_1 R}{I_1 R - U_1}.$$

в) От схемата на фиг. 1.73, *а* имаме

$$U_1 = I_1 \frac{R r_V}{R + r_V}, \qquad R = \frac{U_1}{I_1 - \frac{U_1}{r_V}} \approx \frac{U_1}{I_1},$$

когато $\frac{U_1}{r_V} << I_1$. Последното условие показва, че токът през собственото съпротивление r_V на волтметъра трябва да бъде много по-малък от общия ток I_1 и следователно от тока I през съпротивлението R. Това е възможно, когато $R << r_V$. Ето защо тази схема може да се използва за определяне на R по показанията на амперметъра I_1 и на волтметъра U_1 при малки по стойност съпротивления.

От схемата на фиг. 1.73, *б* намираме

$$R = \frac{U_2}{I_2} - r_A \approx \frac{U_2}{I_2},$$

когато $r_A << \frac{U_2}{I_2}$. Последното условие показва, че собственото съпротивление на амперметъра r_A трябва да е много по-малко от съпротивлението $R + r_A$, т.е. $r_A << R$. Следователно тази схема може да се използва за определяне на R по показанията на амперметъра I_2 и на волтметъра U_2 при големи по стойност съпротивления.

1.81. За да се определи мястото на повредата в изолацията на двупроводна телефонна линия с дължина l = 4 km, към единия ѝ край се свързва акумулатор с напрежение U = 15 V и пренебрежимо малко вътрешно съпротивление. При това се оказва, че когато линията е отворена, токът през акумулатора е I_1 = 1 A; ако линията се даде накъсо в другия край, токът през акумулатора става I_2 = 1,8 A. Намерете мястото на повредата, ако съпротивлението на единица дължина на проводника, от който е направена линията, е $\rho = 1,25\ \frac{\Omega}{\text{km}}$.

Дадено: l = 4 km, U = 15 V, I_1 = 1 A, I_2 = 1,8 A, $\rho = 1,25\ \frac{\Omega}{\text{km}}$

Да се намери: x

Решение

За да направим модел на електрическата верига, която характеризира двупроводната линия, ще разсъждаваме по следния начин. Нека приемем, че към изправната линия е свързан акумулаторът с U = 15 V и тя е дадена на късо в другия край. Токът във веригата ще бъде

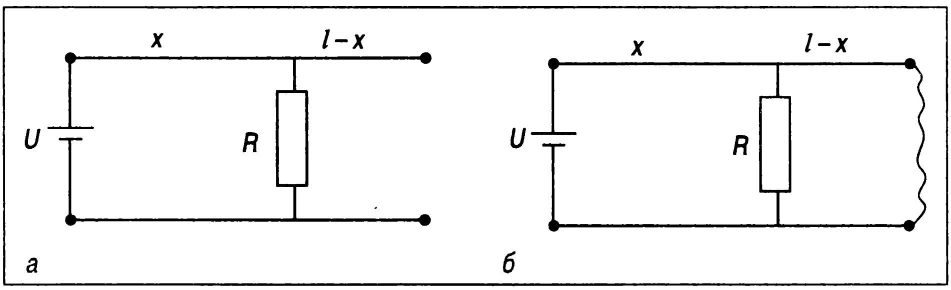
$$I = \frac{U}{2\rho l} = 1,5 \text{ A}$$

и той удовлетворява условието $I_1 < I < I_2$. Тогава повредата на изолацията можем да отчетем чрез включване на някакво допълнително съпротивление R, което трябва да се намери. На фиг. 1.74, *а* е показана линията в първия случай, а на фиг. 1.74, *б* – във втория случай. Съответните електрически вериги са показани на фиг. 1.75, където $r = \rho x$, а $r_1 = 2(l - x)\rho$. В първия случай (фиг. 1.75, *а*) еквивалентното съпротивление R_1 е

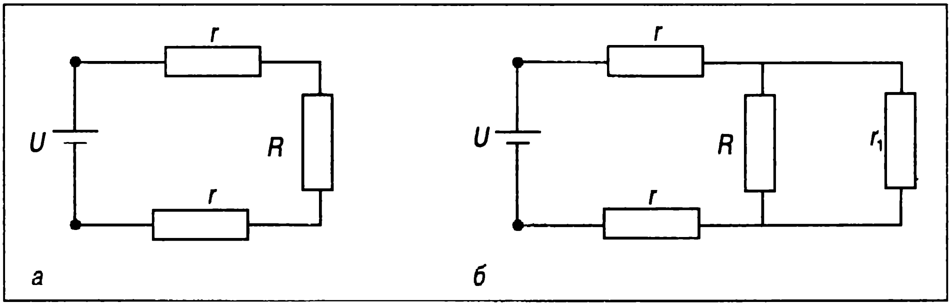
$$R_1 = 2r + R = 2\rho x + R,$$

а във втория случай еквивалентното съпротивление R_2 е

$$R_2 = 2r + \frac{Rr_1}{R + r_1} = 2\rho x + \frac{2R\rho(l-x)}{R + 2\rho(l-x)}.$$



Фиг. 1.74



Фиг. 1.75

В първия случай съгласно със закона на Ом

$$U = R_1 I_1 = (2\rho x + R) I_1,$$

а във втория

$$U = R_2 I_2 = \left[2\rho x + \frac{2\rho(l-x)R}{R + 2\rho(l-x)} \right] I_2.$$

Като изразим от първото равенство

$$2\rho x = \frac{U}{I_1} - R$$

и заместим във второто равенство, получаваме следното квадратно уравнение за неизвестното съпротивление R:

$$I_2 R^2 - 2U\left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right)R + \left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right)\left(\frac{U^2}{I_1} - 2\rho l U\right) = 0.$$

Тъй като коефициентите пред различните степени на R в уравнението са сложни изрази, заместваме всички величини с техните числени стойности в единици SI и уравнението добива вида

$$0{,}3R^2 - 4R + 10 = 0.$$

Неговите решения са

$$R' = 10\ \Omega, \quad R'' \approx 3{,}3\ \Omega,$$

на които съответстват

$$x' = 2\ \text{km}, \quad x'' = 4{,}7\ \text{km}.$$

Тъй като дължината на линията $l > x$, стойността $x'' = 4{,}7$ km не удовлетворява условието на задачата. Следователно повредата на изолацията се намира на разстояние $x = 2$ km от началото.

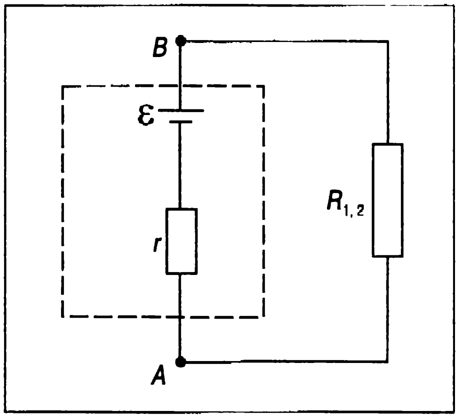
1.82. Когато резистор със съпротивление $R_1 = 1\ \Omega$ се свърже към източник, напрежението между клемите му е $U_1 = 1{,}5$ V, а когато към същия източник се свърже резистор със съпротивление $R_2 = 2\ \Omega$, напрежението между клемите му е $U_2 = 2$ V. Намерете ЕДН и вътрешното съпротивление на източника.

Дадено: $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $U_1 = 1{,}5$ V, $U_2 = 2$ V
Да се намери: $\mathcal{E}$, r

Решение

На фиг. 1.76 е показана схемата на електрическата верига, на която източникът е представен със своето вътрешно съпротивление r. Напрежението между точките A и B е напрежението между клемите на източника и същевременно напрежението между краищата на съпротивлението R_1 (R_2). Тогава имаме

$$U_1 = I_1R_1, \quad \mathcal{E} = I_1(R_1 + r)$$
$$U_2 = I_2R_2, \quad \mathcal{E} = I_2(R_2 + r).$$



Фиг. 1.76

Следователно

$$U_1 + I_1r = U_2 + I_2r,$$

откъдето намираме

$$r = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2}.$$

Тъй като

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U_2}{R_2},$$

окончателно намираме

$$r = \frac{(U_2 - U_1)R_1R_2}{U_1R_2 - U_2R_1} = 1\ \Omega.$$

Тогава ЕДН $\mathcal{E}$ на източника е

$$\mathcal{E} = I_1(R_1 + r) = \frac{U_1(R_1 + r)}{R_1} = 3\ \text{V}.$$

Задачи

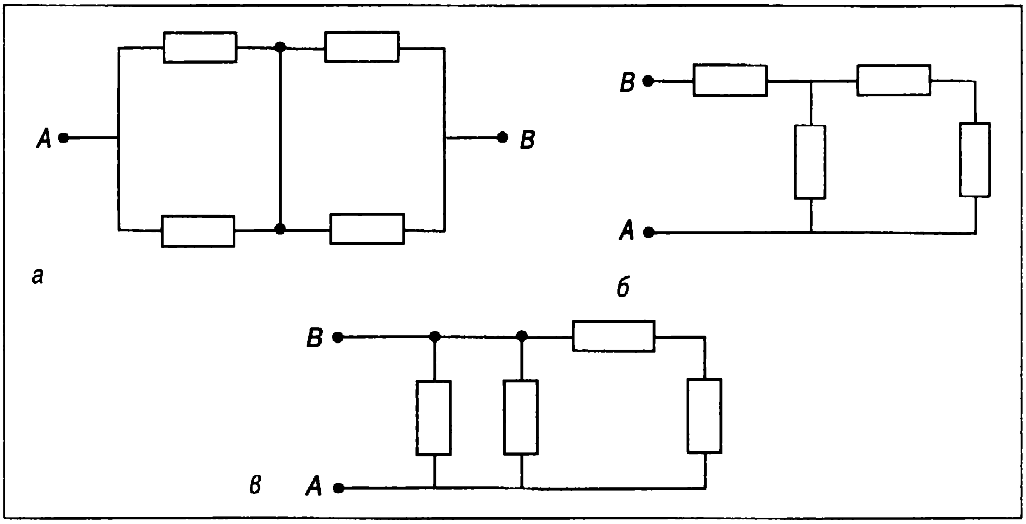
1.83. Електричният ток във верига се изменя по закона $I = I_0 + at$, където $I_0 = 2$ A, $a = 2$ A/s. Намерете заряда, който преминава през напречното сечение на проводник за интервала от $t_1 = 1$ s до $t_2 = 3$ s.

1.84. Два еднакви плоски въздушни кондензатора са свързани успоредно. Те са заредени и включени към източник на напрежение, като общият им заряд е Q. В даден момент разстоянието между пластините (електродите) на първия кондензатор започва равномерно да се увеличава по закона $d_1 = d_0 + vt$, а разстоянието между пластините на втория кондензатор равномерно да намалява по закона $d_2 = d_0 - vt$. Определете тока във веригата от двата кондензатора при движение на пластините им.

1.85. Плосък кондензатор е запълнен с материал с диелектрична проницаемост ε и специфично съпротивление ρ. Неговият капацитет е C. Определете съпротивлението R на кондензатора. Какъв ток I ще тече през него, когато напрежението между електродите му е U?

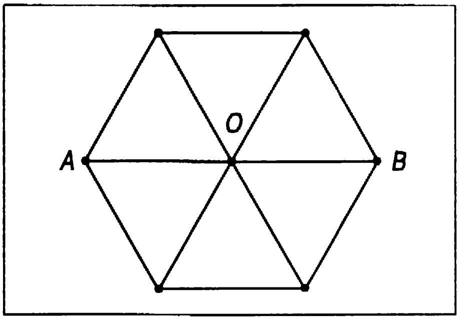
1.86. Определете съпротивлението на стоманен проводник с диаметър $d = 1$ mm. Масата на проводника е $m = 300$ g.

1.87. Четири еднакви резистора, всеки от които има съпротивление r, са свързани по няколко различни начина, показани на фиг. 1.77. Определете еквивалентното съпротивление във всеки един от случаите.



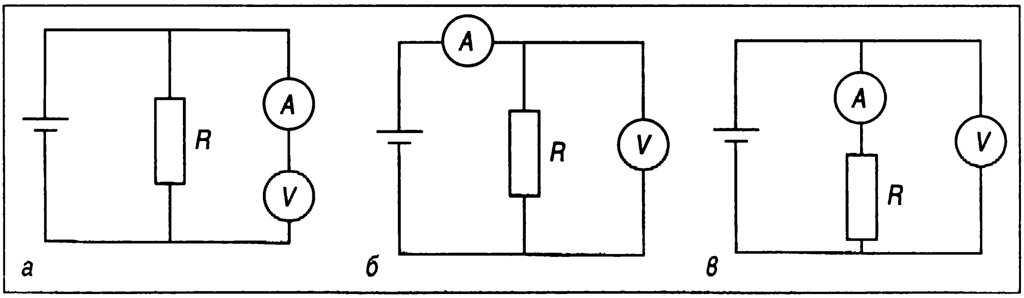
Фиг. 1.77

** **1.88.** Определете съпротивлението на метална рамка във вид на правилен шестоъгълник с три диагонала, запоени в центъра (фиг. 1.78), когато напрежението е подадено между точките A и B. Съпротивлението на всяка страна на шестоъгълника е r.



Фиг. 1.78

1.89. При свързването на амперметър и волтметър в три различни схеми (фиг. 1.79) показанията на уредите са съответно I_1, U_1; I_2, U_2; I_3, U_3. По тези показания определете съпротивлението R на резистора, а така също собствените съпротивления r_V и r_A на волтметъра и амперметъра.

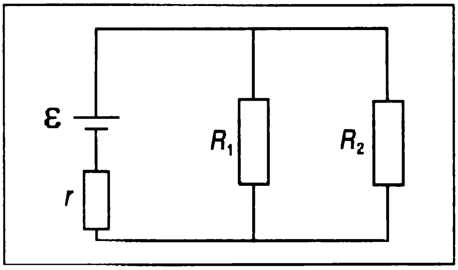


Фиг. 1.79

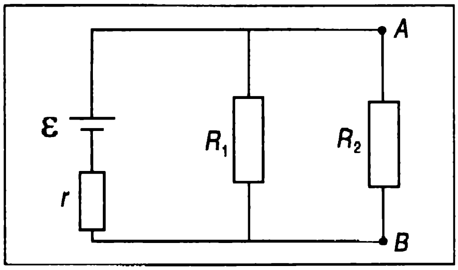
** **1.90.** Към единия край на двупроводна линия е свързан източник на постоянно ЕДН, а към другия – консуматор със съпротивление R_0. При повреждане на изолацията на определено място по линията токът през източника нараства два пъти, а токът през съпротивлението R_0 намалява осем пъти. Намерете допълнителното съпротивление R в мястото на повреждане на изолацията, ако дължината на двупроводната линия е l, а съпротивлението на единица дължина от проводника, от който е направена линията, е ρ.

1.91. Когато свържем към източник на ЕДН резистор със съпротивление $R_1 = 16\ \Omega$, токът във веригата е $I_1 = 1$ A, а когато към същия източник свържем резистор със съпротивление $R_2 = 8\ \Omega$, токът е $I_2 = 1{,}8$ A. Намерете ЕДН на източника и неговото вътрешно съпротивление.

1.92. В електрическата верига, представена на фиг. 1.80, $\mathcal{E} = 9$ V, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$ и токът през резистора 1 е $I_1 = 1{,}8$ A. Намерете вътрешното съпротивление r на източника.



Фиг. 1.80



Фиг. 1.81

1.93. В електрическата верига, представена на фиг. 1.81, $\mathcal{E} = 12$ V, $r = 1\ \Omega$, $R_1 = R_2 = 2\ \Omega$. Намерете потенциалната разлика $\varphi_A - \varphi_B$.

1.94. Волтметър, свързан към клемите на източник, показва напрежение $U_1 = 6$ V. Когато към клемите се включи и резистор, волтметърът показва напрежение $U_2 = 3$ V. Какво ще бъде показанието на уреда, ако вместо един към клемите на източника включим два еднакви резистора, които са свързани:

а) последователно;

б) успоредно?

Работа и мощност. Закон на Джаул–Ленц

При протичане на ток I през резистор за време t електричните сили извършват работа, която се пресмята по формулата

$$A = IUt,$$

където U е напрежението между краищата на резистора. Тази работа е прието да се нарича работа на тока. Като се използва законът на Ом за част от веригата, се получават еквивалентни изрази:

$$A = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t.$$

Мощността на електричния ток е равна на работата, извършена за единица време:

$$P = \frac{A}{t} = IU = I^2R = \frac{U^2}{R}.$$

Мощността не е собствена характеристика на резистора (консуматора), а зависи от режима на работа, т.е. от приложеното напрежение U или от тока I, който протича през него.

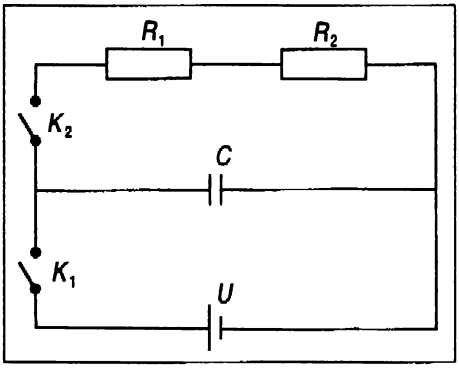
Когато единственият ефект от протичането на електричен ток е нагряването на резистора, отделеното от него количество топлина Q се пресмята по закона на Джаул–Ленц

$$Q = A = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t.$$

ПРИМЕРИ

1.95. На фиг. 1.82 е показана схема на електрическа верига. Първоначално ключът K_1 се затваря и кондензаторът се зарежда. След това ключът K_1 се отваря, а ключът K_2 се затваря. Какво количество топлина се отделя от всеки един от резисторите?

Дадено: U, C, R_1, R_2
Да се намери: Q_1, Q_2
Решение



Фиг. 1.82

При затваряне на ключа K_1 кондензаторът се зарежда до напрежение U. След отваряне на K_1 и затваряне на K_2 започва разреждане на кондензатора и през резисторите протича ток, който се изменя с времето. Тогава запасената в кондензатора енергия

$$W = \frac{CU^2}{2}$$

се преобразува в топлина, т.е.

$$Q_1 + Q_2 = W.$$

От друга страна, през резисторите протича един и същ ток (те са свързани последователно) и съгласно със закона на Джаул–Ленц имаме

$$Q_1 \sim R_1, \quad Q_2 \sim R_2, \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

От последното равенство изразяваме

$$Q_2 = \frac{R_2}{R_1}Q_1$$

и като заместим в $Q_1 + Q_2 = W$, имаме

$$Q_1\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = W,$$

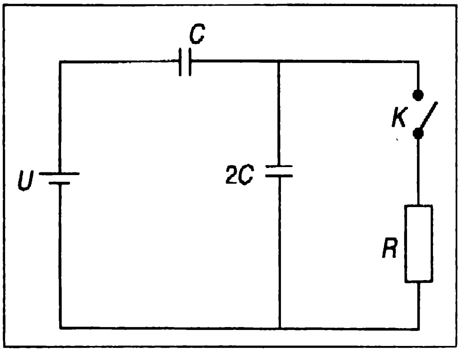
откъдето намираме

$$Q_1 = \frac{R_1}{2(R_1 + R_2)}CU^2,$$

$$Q_2 = \frac{R_2}{2(R_1 + R_2)}CU^2.$$

1.96. Какво количество топлина се отделя от резистора със съпротивление R след затварянето на ключа K (фиг. 1.83)? Вътрешното съпротивление на източника се пренебрегва.

Дадено: U, C, R
Да се намери: Q
Решение



Фиг. 1.83

При отворен ключ K източникът зарежда кондензаторите. Върху всеки от тях се натрупва заряд q_1, тъй като са свързани последователно. Еквивалентният кондензатор, който има капацитет

$$C_1 = \frac{C\,.\,2C}{C+2C} = \frac{2}{3}C,$$

също има заряд q_1 и запасената в него енергия е

$$W_1 = \frac{C_1U^2}{2} = \frac{1}{3}CU^2.$$

При затваряне на ключа K източникът извършва работа A по преразпределение и натрупване на заряди. В този случай кондензаторът с капацитет $2C$ не участва в процеса, тъй като зарядите преминават през резистора със съпротивление R. Тогава върху кондензатора с капацитет C се натрупва заряд

$$q_2 = CU,$$

като неговата енергия е

$$W_2 = \frac{CU^2}{2},$$

а резисторът отделя топлина Q. От закона за запазване на енергията

$$A = (W_2 - W_1) + Q$$

намираме

$$Q = A - (W_2 - W_1).$$

Извършената от източника работа е

$$A = U(q_2 - q_1) = \frac{1}{3}CU^2$$

и след заместване на A, W_1 и W_2 получаваме

$$Q = \frac{1}{3}CU^2 - \left(\frac{CU^2}{2} - \frac{CU^2}{3}\right) = \frac{1}{6}CU^2.$$

1.97. Оловен проводник има дължина l = 1 m. Колко време след включване на проводника към източник на напрежение U = 1,5 V оловото ще започне да се топи? Началната температура е t_0 = 20 °C. Топлинните загуби в околното пространство се пренебрегват.

Дадено: l = 1 m, U = 1,5 V, t_0 = 20 °C, необходимите параметри на оловото
Да се намери: τ

Решение

При протичането на електричен ток през проводника той се нагрява и се достига температурата на топене на оловото. След този момент протичането на тока води до разтопяване на проводника. Следователно необходимото количество топлина според закона на Джаул–Ленц е

$$Q = \frac{U^2}{R}\tau,$$

където съпротивлението R се дава с израза

$$R = \rho\frac{l}{S}.$$

Тук S е напречното сечение на проводника, а ρ – специфичното съпротивление на оловото.

От друга страна, имаме

$$Q = cm(t - t_0),$$

където m е масата на проводника, а c – специфичният топлинен капацитет на оловото.

Тъй като $m = \rho_0 V = \rho_0 lS$ (ρ_0 е плътността на оловото), след заместване намираме

$$Q = c\rho_0 lS(t - t_0).$$

Като приравним двата израза за Q, получаваме

$$\frac{U^2 S}{\rho l}\tau = \rho_0 lSc(t - t_0).$$

След като съкратим на S, намираме

$$\tau = \frac{\rho_0 \rho l^2 c(t - t_0)}{U^2}.$$

По данните от таблиците в приложенията имаме

$$\rho_0 = 11{,}3.10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

$$c = 0{,}13.10^3\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg.K}}$$

$$\rho = 0{,}19\ \frac{\Omega.\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} = 0{,}19.10^{-6}\ \Omega\mathrm{m}$$

$$t = 327\ {}^\circ\mathrm{C},$$

след заместване намираме

$$\tau \approx 38\ \mathrm{s}.$$

Коментар. Както се вижда от израза за времето τ, то не зависи от сечението на проводника. Това свойство е в сила за тънки проводници, когато могат да се пренебрегнат топлинните загуби в околното пространство. При проводници с по-големи сечения излъчването през околната им повърхност е значително и топлинните загуби не могат да се пренебрегнат. В такъв случай е необходим друг подход.

1.98. Към акумулатор с вътрешно съпротивление r = 0,08 Ω е свързан консуматор (резистор). Когато токът във веригата е I_1 = 4 A, резисторът консумира мощност P_1 = 8 W. Каква мощност P_2 ще консумира друг резистор, ако при свързването му към акумулатора токът във веригата е I_2 = 6 A?

Дадено: r = 0,08 Ω, I_1 = 4 A, P_1 = 8 W, I_2 = 6 A

Да се намери: P_2

Решение

Нека означим съпротивлението на първия резистор с R_1, а на втория – с R_2. Ако ЕДН на акумулатора е $\mathcal{E}$, имаме:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r},$$

а консумираната мощност е съответно

$$P_1 = I_1^2 R_1, \quad P_2 = I_2^2 R_2.$$

Търсената величина е P_2, за чието намиране трябва да определим R_2. За тази цел използваме другите три равенства. От първите две следва

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2 + r}{R_1 + r},$$

откъдето определяме R_1

$$R_1 = \frac{1}{I_1}[I_2 R_2 + (I_2 - I_1) r].$$

Полученият резултат за R_1 заместваме в израза за P_1, откъдето намираме

$$R_2 = \frac{1}{I_1 I_2}[P_1 - I_1(I_2 - I_1) r].$$

След като заместим R_2 с този израз, получаваме

$$P_2 = I_2^2 R_2 = \frac{I_2}{I_1}[P_1 - I_1(I_2 - I_1) r] \approx 11 \text{ W}.$$

1.99. При свързване на резистор със съпротивление R_1 към батерия консумираната от него мощност е P. Намерете ЕДН на батерията и нейното вътрешно съпротивление, ако при свързването към нея на резистор със съпротивление R_2 консумираната мощност също е равна на P.

Дадено: R_1, R_2, P

Да се намери: $\mathcal{E}$, r

Решение

Когато към източник с ЕДН, равно на $\mathcal{E}$, и вътрешно съпротивление r свържем резистор със съпротивление R, токът във веригата е

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

а консумираната от резистора мощност е

$$P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2}.$$

В нашия случай

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2 R_2}{(R_2 + r)^2}.$$

След като съкратим на $\mathcal{E}^2$, получаваме уравнение за r, което може да се запише във вида

$$\sqrt{R_1}(R_2 + r) = \sqrt{R_2}(R_1 + r).$$

Като отчетем, че $R_1 \neq R_2$, намираме

$$r = \sqrt{R_1 R_2}.$$

От израза за мощността при свързан резистор със съпротивление R_1 имаме

$$\mathcal{E}^2 = P\frac{(R_1 + r)^2}{R_1}.$$

След като коренуваме и заместим r с неговото равно, получаваме

$$\mathcal{E} = \sqrt{P}(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}).$$

1.100. Към източник с ЕДН $\mathcal{E}$ и вътрешно съпротивление r е свързан реостат.

а) Намерете консумираната от реостата мощност P като функция на съпротивлението му R. Намерете максималната ѝ стойност. Начертайте графиката на зависимостта $P(R)$.

б) Намерете консумираната от реостата мощност P като функция на тока I във веригата. Намерете максималната стойност на мощността. Начертайте графиката на $P(I)$.

Дадено: $\mathcal{E}$, r, R, I

Да се намери: $P(R)$, $P(I)$, P_{max}

Решение

а) Консумираната от реостата мощност, когато е свързан към източника, е

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2}.$$

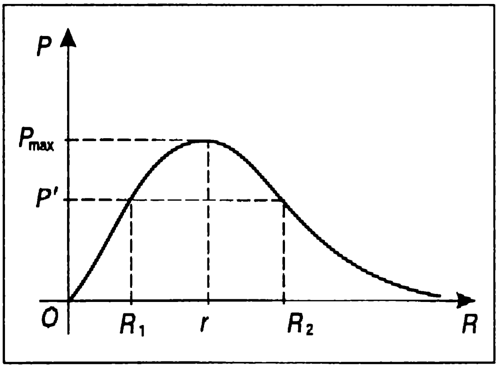
Като извадим r^2 пред скоби в знаменателя, преписваме израза във вида

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{r}\frac{\frac{R}{r}}{\left(\frac{R}{r} + 1\right)^2} = f(x)\frac{\mathcal{E}^2}{r},$$

където $x = \frac{R}{r}$, а $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$. При този запис на P се вижда, че мощността се определя от характеристиките на източника $\mathcal{E}$ и r, а така също и от стойностите на отношението $x = \frac{R}{r}$. Както следва от пример 1.63, $f(x)$ има максимална стойност при $x = 1$, т.е. при $R = r$, която е $f(1) = 1/4$. Тогава максималната мощност е

$$P_{max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}.$$

Графиката на мощността е показана на фиг. 1.84. От нея се вижда, че мощността клони към нула както при малки стойности на R, така и при големи стойности на R. При стойност $R = r$ мощността, консумирана от реостата, е максимална. Когато $R \neq r$, на всяка стойност на мощността съответстват две различни съпротивления R_1 и R_2. Съгласно с пример 1.99 те са свързани с равенството $r = \sqrt{R_1 R_2}$.



Фиг. 1.84

б) Токът във веригата е

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}.$$

За да изразим мощността чрез I и характеристиките на източника, преобразуваме P по следния начин:

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2 (R+r-r)}{(R+r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r} - \frac{\mathcal{E}^2 r}{(R+r)^2}.$$

Тогава имаме

$$P = \mathcal{E} I - rI^2.$$

Максималната мощност можем да определим, като отделим пълен квадратен двучлен

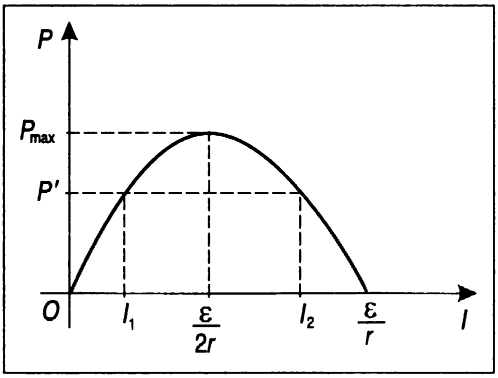
$$P = -(\sqrt{r}I)^2 + 2\frac{\mathcal{E}}{2\sqrt{r}}(\sqrt{r}I) - \left(\frac{\mathcal{E}}{2\sqrt{r}}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}}{2\sqrt{r}}\right)^2,$$

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} - r\left(I - \frac{\mathcal{E}}{2r}\right)^2.$$

От получения израз се вижда, че мощността има най-голяма стойност, когато изразът в скобите е нула. Тогава

$$I = \frac{\mathcal{E}}{2r}, \quad P_{max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}.$$

Графиката на мощността е показана на фиг. 1.85. От нея се вижда, че мощността клони към нула, когато токът във веригата е много малък или клони към стойността $I_{max} = \frac{\mathcal{E}}{r}$ – токът на късо съединение на източника. При стойност $I = \frac{\mathcal{E}}{2r}$ мощността е максимална. Когато $I \neq \frac{\mathcal{E}}{2r}$, на всяка стойност на P съответстват два различни тока I_1 и I_2.



Фиг. 1.85

1.101. Акумулатор с ЕДН $\mathcal{E}$ и вътрешно съпротивление r е свързан с консуматор. Определете КПД η на акумулатора, ако:

а) съпротивлението на консуматора е R;

б) токът във веригата е I.

Начертайте графиките на зависимостите $\eta(R)$ и $\eta(I)$.

Указание. Под КПД η на източник на напрежение се разбира отношението на мощността P на консуматора към пълната мощност P_0 във веригата.

Дадено: $\mathcal{E}$, r, R, I

Да се намери: $\eta(R)$, $\eta(I)$

Решение

По определение мощността, получавана от консуматора, е

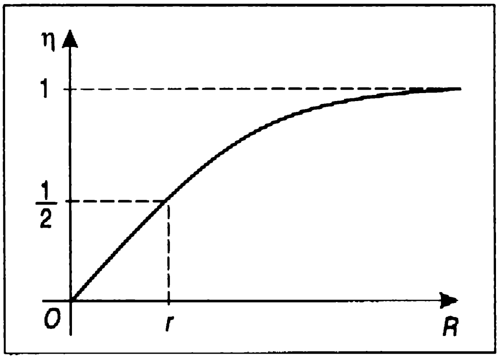
$$P = I^2 R,$$

а пълната консумирана мощност се определя от общото съпротивление на веригата

$$P_0 = I^2 (R + r).$$

Тогава

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{R}{R + r}.$$



Фиг. 1.86

Както се вижда, КПД η е винаги по-малък от единица и клони към едно, когато R нараства. На фиг. 1.86 е показана графиката на $\eta(R)$.

б) За да намерим $\eta(I)$, ще използваме закона на Ом за цялата верига

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

Тогава

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2} = \mathcal{E} I - r I^2,$$

а пълната мощност на тока във веригата ще бъде

$$P_0 = I^2 (R + r) = \mathcal{E} I.$$

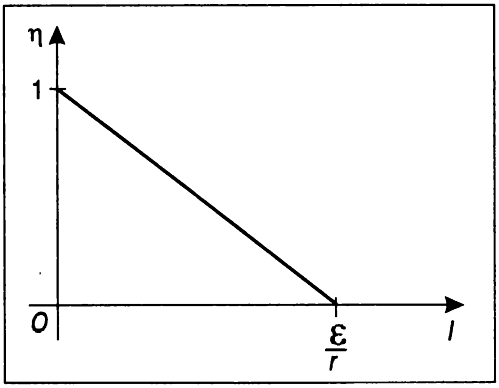
За КПД получаваме израза

$$\eta = \frac{P}{P_0} = 1 - \frac{Ir}{\mathcal{E}}.$$

Графиката на КПД η на източника в зависимост от тока I е показана на фиг. 1.87. Тя е права линия, като с увеличаване на тока КПД намалява. КПД на източника става нула при

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r},$$

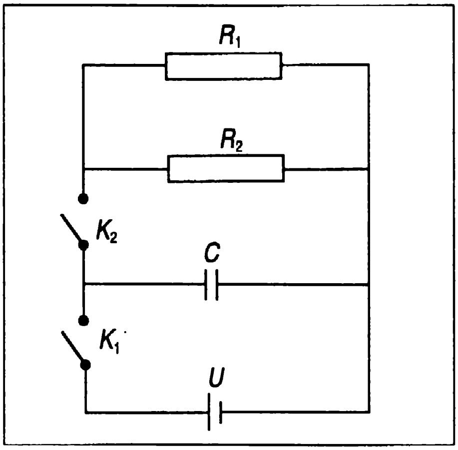
т.е. когато клемите на източника са свързани накъсо.



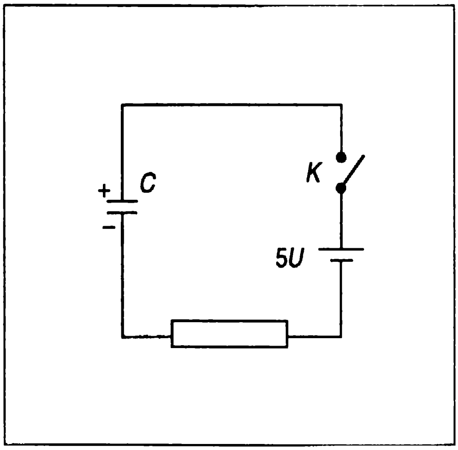
Фиг. 1.87

Задачи

1.102. На фиг. 1.88 е показана схема на електрическа верига. Първоначално ключът K_1 се затваря и кондензаторът се зарежда. След това K_1 се отваря, а K_2 се затваря. Какво количество топлина се отделя на всеки един от резисторите?



Фиг. 1.88



Фиг. 1.89

1.103. Зареден до напрежение U кондензатор с капацитет C се свързва към батерия с напрежение $5U$ чрез резистор с голямо съпротивление. Определете количеството топлина, отделено от резистора, при зареждането на кондензатора до напрежение $5U$ (фиг. 1.89).

1.104. Нагревател има съпротивление $R = 50\ \Omega$ и работи при мрежово напрежение $U = 220$ V. С колко градуса ще се повиши температурата на вода с маса $m = 1{,}2$ kg за време $\tau = 5$ min при нагряване с този нагревател в съд с топлинен капацитет $C = 100$ J/K?

1.105. Когато към акумулатор се свърже консуматор, токът във веригата е $I_1 = 5$ A и консумираната мощност е $P_1 = 9{,}1$ W. При свързване към същия акумулатор на друг консуматор токът във веригата е $I_2 = 8$ A и консумираната мощност е $P_2 = 14{,}5$ W. Определете вътрешното съпротивление на акумулатора.

1.106. Резистор със съпротивление R е свързан към източник с вътрешно съпротивление r. Към първия резистор се свързва успоредно резистор с неизвестно съпротивление, при което общата консумирана от двата резистора мощност е същата, както мощността, консумирана от първия резистор, когато е включен самостоятелно. Намерете неизвестното съпротивление.

1.107. Консумираната мощност от резистор със съпротивление $R_1 = 200\ \Omega$, свързан към източник на напрежение, е $P = 200$ W. Когато друг резистор със съпротивление $R_2 = 500\ \Omega$ се свърже към източника, той консумира същата мощност. Намерете тока на късо съединение на източника.

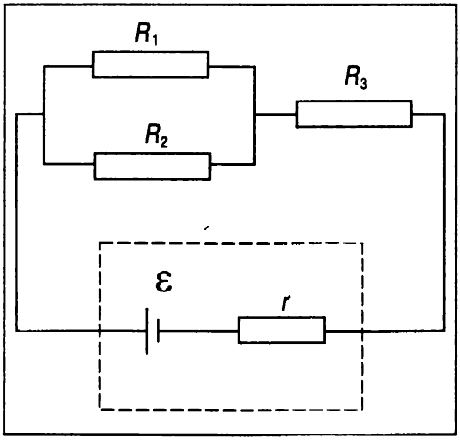
1.108. При свързване на резистор към източник с ЕДН $\mathcal{E}$ и вътрешно съпротивление r резисторът консумира мощност P. Определете:

а) тока във веригата;

б) напрежението между клемите на източника;

в) съпротивлението на резистора.

1.109. На фиг. 1.90 е показана схемата на електрическа верига, в която $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$, $R_3 = 15\ \Omega$, $\mathcal{E} = 200$ V, $r = 1\ \Omega$. Определете мощността, консумирана от резистора със съпротивление R_1.



Фиг. 1.90

1.110. Два резистора, всеки със съпротивление $R = 1\ \Omega$, се свързват към източник на ЕДН първоначално последователно, а след това успоредно. В двата случая общата мощност P, консумирана от резисторите, е $P = 18$ W. Намерете ЕДН на източника.

1.111. Гирлянда за елха включва $N = 20$ еднакви лампички, свързани последователно. Всяка от тях работи нормално при напрежение $U_0 = 6$ V. Гирляндата се включва в електрическата мрежа с напрежение $U = 220$ V чрез допълнително съпротивление R, свързано към гирляндата последователно. Намерете каква част от общата мощност във веригата се пада на резистора.

** **1.112.** Два консуматора се включват към батерия, като първия път са свързани последователно, а втория път – успоредно. В кой от двата случая КПД на източника е по-голям?

Електричен ток в различни среди

Токовите носители в металите са електрони. Токът в метален проводник със сечение S се определя по формулата

$$I = envS,$$

където e е големината на заряда на електрона, n – концентрацията на свободните електрони, а v – скоростта на насоченото им движение. Между тока и напрежението съществува правопропорционална зависимост – волт-амперната характеристика на метален проводник е права линия. Съпротивлението му зависи от температурата по закона

$$R = R_0[1 + \alpha(t - t_0)].$$

Тук α е температурният коефициент на съпротивлението за дадения метал. Формулата е приложима за температури, при които $\alpha(t - t_0) < 1$.

Токовите носители в полупроводниците са електрони (n – носители) и дупки (p – носители). Полупроводниците биват собствени и примесни.

В електролитите токовите носители са положителни и отрицателни йони. Протичането на електричен ток в електролит винаги е свързано с отделяне (отлагане) върху електродите на вещества в зависимост от състава на електролита. Това явление се нарича електролиза. Законите на електролизата, формулирани от М. Фарадей, са:

1. Масата на веществото, отделено върху електрод, е

$$m = kIt = kq,$$

където k е електрохимичният еквивалент на даденото вещество.

2. Електрохимичният еквивалент се определя по формулата

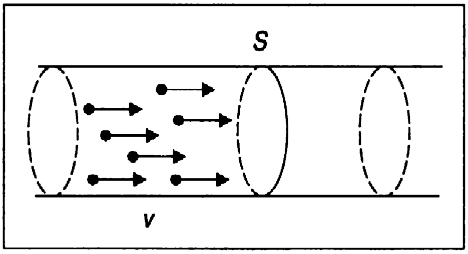
$$k = \frac{1}{F}\frac{\mu}{Z},$$

където μ е моларната маса, Z – валентността, а константата на Фарадей е $F = 96\ 485\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{mol}}$.

В йонизираните газове токовите носители са електрони и два вида йони – положителни и отрицателни. Протичането на електричен ток се нарича газов разряд. Той е несамостоятелен при наличие на външна йонизираща причина и е самостоятелен, когато протича без външна йонизираща причина.

ПРИМЕРИ

1.113. По цилиндричен меден проводник с напречно сечение S = 25 mm^2 протича ток I = 50 mA. Намерете скоростта на насочено движение на електроните, като приемете, че всеки атом мед (Cu) отдава по един свободен електрон.



Фиг. 1.91

Дадено: S = 25 mm^2, I = 50 mA, меден проводник

Да се намери: v

Решение

По определение токът I е равен на заряда q, преминал през напречното сечение на проводника за единица време. Да разгледаме фиг. 1.91. От нея се вижда, че за единица време през сечението с площ S ще преминат всички електрони, които се намират в обема $V = Sv$. Техният брой е nSv, където n е концентрацията на електроните. Общият заряд на тези електрони е $q = enSv$, където e е елементарният заряд. Следователно имаме

$$I = enSv.$$

Формулата показва, че токът I зависи от концентрацията на електроните n, напречното сечение S на проводника и скоростта v на насоченото движение на електроните. Тогава търсената скорост е

$$v = \frac{I}{eSn}.$$

За да намерим v, трябва да определим концентрацията. Тъй като всеки атом отдава един свободен електрон, концентрацията на електроните е равна на концентрацията на атомите

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_A}{V_\mu},$$

където V_μ е обемът на един mol мед (Cu) и неговата маса е $\mu = 63{,}5\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$. Тогава

$$\mu = \rho V_\mu, \quad V_\mu = \frac{\mu}{\rho},$$

като плътността е $\rho = 8{,}9.10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ и следователно

$$n = \frac{N_A\rho}{\mu} \approx 8{,}4.10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

Като отчетем, че $e = 1{,}6.10^{-19}$ C, намираме

$$v \approx 0{,}15\ \frac{\mu m}{s}.$$

Коментар. При тази скорост на насоченото движение свободните електрони в метала ще изминат разстояние 1 mm за 2 часа. От опит обаче знаем, че при включване на осветлението лампите светват почти мигновено. Скоростта, с която протича токът, и скоростта на насоченото движение на свободните електрони не е една и съща. Скоростта на протичане на електричния ток в метален проводник е скоростта, с която се разпространява действието на електричното поле върху свободните електрони. Тя е близка до скоростта на светлината във вакуум – 300 000 km/s.

1.114. Съпротивлението на волфрамовата нагревателна нишка на електрическа лампа е $R_1 = 60\ \Omega$, когато тя не е включена. Когато лампата свети, нагрятата нишка има съпротивление $R_2 = 630\ \Omega$. Оценете температурата на нишката в режим на работа на лампата.

Дадено: $R_1 = 60\ \Omega$, $R_2 = 630\ \Omega$, волфрамова нишка
Да се намери: t
Решение

При протичане на електричен ток волфрамовата нишка се нагрява, повишава температурата си и изменя съпротивлението си. За да намерим температурата на нишката в режим на работа, трябва да сме наясно по какъв закон се изменя съпротивлението ѝ с температурата. Тъй като волфрамът е метал, можем да предположим, че законът е линеен

$$R_2 = R_1[1 + \alpha(t_2 - t_1)],$$

където α е температурният коефициент на съпротивлението и за волфрам $\alpha = 4{,}8.10^{-3}\ K^{-1}$, t_1 – стайната температура, която можем да приемем за 20 °C, а t_2 – температурата на нагрятата нишка. В режим на работа нишката свети, защото е повишила значително температурата си и съпротивлението ѝ R_2 само приблизително удовлетворява предложения закон. По тази причина в условието на задачата е използвана думата „оценете“, а не „намерете“, защото полученият по този начин резултат ще бъде приблизителен. Тогава

$$t_2 = t_1 + \left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)\frac{1}{\alpha} \approx 2000\ °C.$$

1.115. При стайна температура концентрацията на свободните електрони в чист германий (Ge) е $n = 3.10^{19}\ m^{-3}$. Определете каква част α от атомите на германия са йонизирани. Приемете, че всеки йонизиран атом отдава по един свободен електрон. Плътността на германия е $\rho = 5{,}4\ \frac{g}{cm^3}$.

Дадено: $n = 3.10^{19}\ m^{-3}$, $\rho = 5{,}4\ \frac{g}{cm^3}$, германий
Да се намери: α
Решение

За да отговорим на въпроса, поставен в условието на задачата, трябва да намерим концентрацията N на атомите германий. Тъй като всеки йонизиран атом отдава по един електрон, имаме

$$\alpha = \frac{n}{N}.$$

По аналогия с пример 1.113 намираме

$$N = \frac{N_A}{V_\mu} = \frac{N_A \rho}{\mu},$$

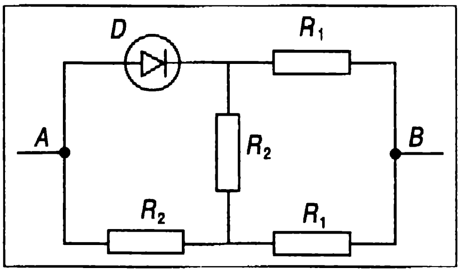
където μ е моларната маса на германия – $\mu = 73\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}$. След като заместим, за α намираме

$$\alpha = \frac{n\mu}{N_A \rho} \approx 7.10^{-10}.$$

1.116. Определете еквивалентното съпротивление на участъка от електрическата верига, показан на фиг. 1.92, при две условия:

а) токът тече от A към B (съпротивление R');

б) токът тече в обратна посока – от B към A (съпротивление R''). Съпротивлението на първия резистор е $R_1 = 30\ \Omega$, а на втория – $R_2 = 60\ \Omega$. Във веригата е включен идеален полупроводников диод D.



Фиг. 1.92

Указание. Идеален диод се нарича този, чието съпротивление в права посока може да се приеме за нула, а в обратна посока – за безкрайно голямо.

Дадено: $R_1 = 30\ \Omega$, $R_2 = 60\ \Omega$, диод

Да се намери: R', R''

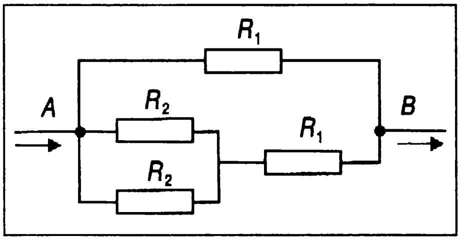
Решение

а) Когато токът тече от A към B, съпротивлението на диода е нула. Еквивалентната схема на участъка от електрическата верига е показана на фиг. 1.93.

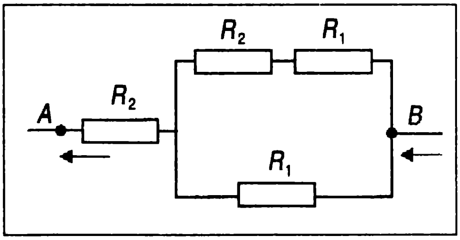
$$R' = \frac{\left(\frac{R_2}{2} + R_1\right) R_1}{\left(\frac{R_2}{2} + R_1\right) + R_1} = \frac{60.30}{60+30} = 20\ \Omega.$$

б) При противоположна посока на тока – от B към A, съпротивлението на диода е много голямо (практически безкрайно голямо), което е еквивалентно на прекъсване на веригата. Еквивалентната схема на веригата в този случай е показана на фиг. 1.94. Еквивалентното съпротивление е

$$R'' = R_2 + \frac{(R_1 + R_2) R_1}{(R_1 + R_2) + R_1} = 60 + \frac{90.30}{90+30} = 82{,}5\ \Omega.$$



Фиг. 1.93



Фиг. 1.94

1.117. Каква маса алуминий ще се отложи върху катода за време $t = 10$ h при електролиза на $Al_2(SO_4)_3$, ако токът през електролита е $I = 1$ A?

Дадено: $t = 10$ h, $I = 1$ A

Да се намери: m

Решение

Съгласно с първия закон на Фарадей за електролизата отложената върху катода маса алуминий е

$$m = kIt.$$

От втория закон на Фарадей за електролизата имаме

$$k = \frac{1}{F}\frac{\mu}{Z}.$$

Като заместим електрохимичния еквивалент, получаваме

$$m = \frac{1}{F}\frac{\mu I t}{Z}.$$

Понеже моларната маса на алуминия е $\mu = 27\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, а валентността му – $Z = 3$, намираме

$$m \approx 3{,}4\ \text{g}.$$

1.118. Метално топче с радиус $R = 3$ cm се покрива с никел в продължение на $t = 5$ h при ток $I = 0{,}3$ A. Определете дебелината на слоя никел, ако валентността му е $Z = 2$.

Дадено: $R = 3$ cm, $t = 5$ h, $I = 0{,}3$ A, $Z = 2$, никел

Да се намери: h

Решение

Нека означим с m масата на отложения при електролизата никел, а с ρ – неговата плътност. Тогава имаме

$$m = \rho V,$$

където V е обемът на никела. Той представлява разликата между обемите на топчета с радиуси $R + h$ и R. Следователно получаваме

$$V = \frac{4}{3}\pi(R+h)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(R^3 + 3R^2h + 3Rh^2 + h^3 - R^3) \approx 4\pi R^2 h$$

при предположението, че $h \ll R$. В правилността на този резултат лесно можем да се убедим, ако приемем, че $R = 1$ cm и $h = 0{,}1$ cm и заместим тези стойности във формулата. Тогава следва, че

$$3R^2h = 0{,}3\ \text{cm}^3, \quad 3Rh^2 = 0{,}03\ \text{cm}^3, \quad h^3 = 0{,}001\ \text{cm}^3.$$

Както се вижда, стойностите на втория и третия член са пренебрежими спрямо първия, т.е. когато h е десет пъти по-малко от R. След като заместим $V = \frac{m}{\rho}$, намираме

$$h = \frac{m}{4\pi R^2 \rho}.$$

Като отчетем законите на Фарадей за електролизата

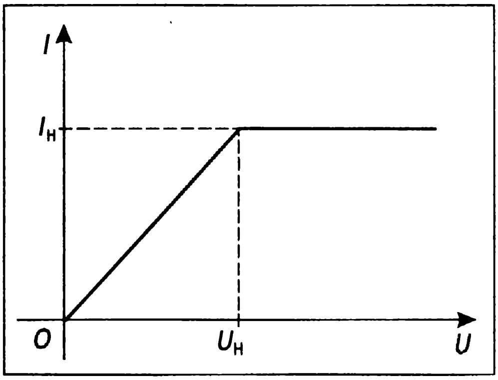
$$m = kIt, \quad k = \frac{1}{F}\frac{\mu}{Z},$$

получаваме

$$h = \frac{\mu I t}{4\pi R^2 \rho F Z} \approx 16\ \mu\text{m}.$$

Тук е отчетено, че $\rho = 8{,}9.10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, а моларната маса на никела е $\mu = 58{,}7\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}$. Този резултат за h е много по-малък от R, което е в съгласие с предположението, направено при решаване на задачата.

1.119. При несамостоятелен газов разряд зависимостта на тока I от напрежението U (волт-амперната характеристика) в газоразрядна тръба има вида, показан на фиг. 1.95. Токът на насищане е $I_н = 10\ \mu\text{A}$. Ако на тръбата с последователно свързан към нея резистор се подаде напрежение от източник с ЕДН $\mathcal{E} = 2\ \text{kV}$, токът през нея е $I_0 = 5\ \mu\text{A}$. Как трябва да се измени съпротивлението на резистора, за да се достигне токът на насищане?



Фиг. 1.95

Дадено: $I_н = 10\ \mu\text{A}$, $I_0 = 5\ \mu\text{A}$, $\mathcal{E} = 2\ \text{kV}$
Да се намери: $\Delta R = R' - R$
Решение

Докато напрежението между краищата на газоразрядната тръба е по-малко от $U_н$, токът през нея е $I < I_н$. Волт-амперната характеристика в тази област е линейна и връзката между тока и напрежението се определя от закона на Ом. Тръбата има поведение на резистор със съпротивление R_0. Тогава можем да запишем

$$\mathcal{E} = I_0(R + R_0 + r), \quad \mathcal{E} = I_н(R' + R_0 + r),$$

където r е вътрешното съпротивление на източника. Като отчетем, че

$$R' + R_0 + r = \frac{\mathcal{E}}{I_н}, \quad R + R_0 + r = \frac{\mathcal{E}}{I_0},$$

намираме

$$\Delta R = R' - R = \mathcal{E}\left(\frac{1}{I_н} - \frac{1}{I_0}\right) = -200\ \text{M}\Omega.$$

Знакът „–" в получения резултат показва, че съпротивлението на резистора трябва да се намали с 200 MΩ. Забележете, че резултатът не зависи от това дали отчитаме вътрешното съпротивление на източника, или не го отчитаме. Неговата стойност е съществена, ако е нужно да се определи стойността на съпротивлението R'.

Задачи

1.120. През два медни проводника, свързани последователно, тече ток. Намерете отношението $\frac{v_1}{v_2}$ на скоростите на насочено движение на електроните, ако диаметърът на втория проводник е два пъти по-голям от диаметъра на първия.

1.121. Намерете скоростта на насочено движение на електроните в сребърен проводник, когато интензитетът на електричното поле е $E = 100\ \frac{\text{mV}}{\text{m}}$. Приемете, че всеки атом от среброто отдава по един свободен електрон.

★ **1.122.** Върху цокъла на електрическа лампа е написано „220 V, 100 W". За да се измери съпротивлението на волфрамовата нишка в ненагрято състояние, на лампата е подадено напрежение U_1 = 2 V и е отчетен ток I_1 = 54 mA. Оценете температурата на волфрамовата нишка, когато лампата е в работен режим.

1.123. В силициев кристал част от атомите Si са заменени с атоми на Al. При стайна температура концентрацията на токовите носители е $n = 3.10^{26}\ \text{m}^{-3}$, като проводимостта е практически изцяло примесна. Определете:

а) вида на примесната проводимост;

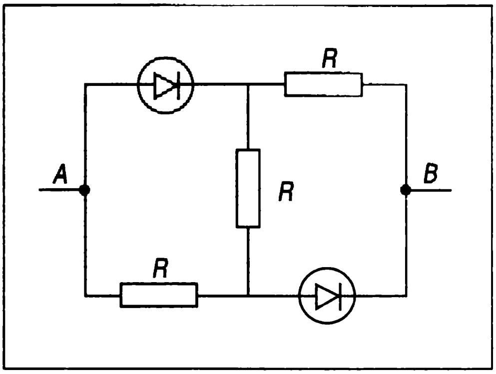
б) каква част α от силициевите атоми е заменена с атоми на алуминия. Плътността на силиция е $\rho = 2{,}33\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

1.124. Определете еквивалентното съпротивление на участъка от електрическата верига, показан на фиг. 1.96, при две посоки на тока – от A към B (съпротивление R') и от B към A (съпротивление R''). Трите резистора имат еднакви съпротивления R = 30 Ω и във веригата са включени два идеални диода D.

★ **1.125.** Определете електрохимичния еквивалент на метала мед (Cu) по следните експериментални данни: време на протичане на тока през електролита t = 20 min, ток I = 0,3 A, начална маса на катода m_1 = 70,4 g, маса на катода след опита m_2 = 70,52 g.

★ **1.126.** Определете дебелината на слоя мед, който се отлага за време t = 1 h върху един от електродите, ако мощността на тока през електролитната вана е P = 20 kW при подадено напрежение U = 500 V. Площта на електродите е S = 0,5 m^2.

1.127. В газоразрядна тръба с волт-амперна характеристика, показана на фиг. 1.95, напрежението на насищане е $U_н$ = 1 kV, а токът на насищане е $I_н$ = 10 μA. Към тръбата последователно е свързан резистор със съпротивление R = 300 MΩ. Във веригата е включен източник с ЕДН $\mathcal{E}$ = 6 kV. Намерете тока през тръбата и напрежението между електродите ѝ. Вътрешното съпротивление на източника се пренебрегва.



Фиг. 1.96

МАГНИТНО ПОЛЕ. ЕЛЕКТРОМАГНИТНА ИНДУКЦИЯ

Магнитно взаимодействие

Магнитното поле действа със сили върху проводник, по който тече ток, и върху движещ се електричен заряд. Според закона на Ампер максималната сила, действаща върху прав проводник с дължина l, който е разположен перпендикулярно на индукцията B на еднородно магнитно поле и по който тече ток I, е

$$F = BIl.$$

Когато посоката на тока и посоката на магнитната индукция сключват ъгъл α, магнитната сила се пресмята по формулата

$$F = BIl.\sin\alpha.$$

Трябва да се помни, че l е дължината на тази част от проводника, която се намира в магнитното поле. Посоката на силата се определя по правилото на опънатите пръсти на дясната ръка: ако палецът на дясната ръка сочи посоката на тока, а останалите опънати пръсти – посоката на магнитната индукция, магнитната сила излиза перпендикулярно от дланта.

Магнитната сила, действаща на електричен заряд q, който се движи със скорост v, перпендикулярна на магнитната индукция, се дава с израза

$$F = |q|vB.$$

Посоката на силата се определя пак по правилото на опънатите пръсти на дясната ръка: ако палецът на дясната ръка сочи посоката на скоростта, а останалите опънати пръсти – посоката на магнитната индукция, силата е перпендикулярна на дланта. В този случай винаги трябва да се отчита знакът на заряда – при положителен заряд магнитната сила излиза перпендикулярно от дланта, а при отрицателен заряд – влиза перпендикулярно в дланта.

Магнитната индукция B на поле, създадено от дълъг прав проводник, по който тече ток I, е перпендикулярна на проводника във всяка точка от полето и посоката и се определя по правилото на свитите пръсти на дясната ръка: ако обхванем мислено с дясната си ръка проводника така, че палецът да сочи посоката на тока, свитите пръсти ще сочат посоката на магнитните силови линии. Посоката на магнитната индукция в дадена точка е по допирателната към линията в дадената точка. Големината на магнитната индукция на разстояние r от проводника е

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

където магнитната константа $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \frac{\text{T.m}}{\text{A}}$. Когато полето се създава от няколко проводника, за намирането му се използва принципът на суперпозицията.

ПРИМЕРИ

1.128. На две тънки нишки е окачен в хоризонтално положение прав проводник с дължина 0,2 m и маса 5 g. Проводникът се намира в еднородно магнитно поле, чиято индукция е 4 mT и има вертикална посока. Когато по проводника тече ток 1 A, нишките се отклоняват от вертикалата. Определете:

а) ъгъла на отклонение на нишките;

б) силата, с която всяка нишка действа на проводника.

Дадено: $l = 0{,}2$ m, $m = 5$ g, $B = 4$ mT, $I = 1$ A

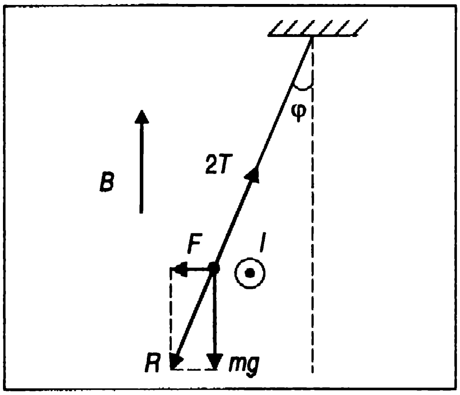
Да се намери: φ, T

Решение

На фиг. 1.97 е показано положението на проводника, когато по него тече ток I, с указаната посока. На проводника действат три сили – силата на тежестта mg, магнитната сила

$$F = BIl$$

(посоката се определя по правилото на опънатите пръсти на дясната ръка) и силата $2T$, с която нишките дърпат проводника. Той е в равновесие, когато равнодействащата на всички сили е нула или $R = 2T$.



Фиг. 1.97

а) За да определим ъгъла на отклонение, разглеждаме правоъгълния триъгълник с катети mg и F. Тогава получаваме

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F}{mg} = \frac{BIl}{mg} = 0{,}016,$$

откъдето намираме

$$\varphi \approx 1°.$$

б) Проводникът е в равновесие, когато

$$T = \frac{R}{2}.$$

Големината на силата ще намерим от правоъгълния триъгълник, в който R е хипотенуза, а mg и F – катети. Като приложим Питагоровата теорема, намираме

$$R = \sqrt{m^2g^2 + B^2I^2l^2}.$$

Търсената сила, с която всяка нишка действа на проводника, е

$$T = \frac{1}{2}(m^2g^2 + B^2I^2l^2)^{\frac{1}{2}} = 25 \text{ mN}.$$

1.129. Проводников контур с формата на квадрат (фиг. 1.98) е направен от меден проводник със сечение $S = 1$ mm^2 и е свързан към източник на напрежение $U = 100$ V. Равнината на квадрата е разположена успоредно на индукционните линии на еднородно магнитно поле с индукция $B = 5$ mT. Определете големината и посоката на резултантната сила, действаща на проводника.

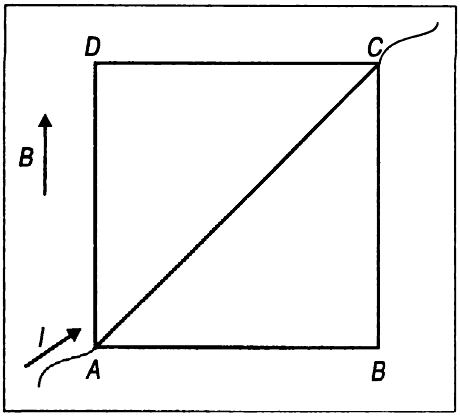
Дадено: $S = 1\ mm^2$, $U = 100\ V$, $B = 5\ mT$, мед (Cu)

Да се намери: F

Решение

При подаване на напрежение U между точките A и C по проводниците в контура протича ток. Ако приемем, че страната на квадрата има съпротивление $R = \rho\frac{l}{S}$, диагоналът има съпротивление $R_1 = \sqrt{2}R$. В секторите ABC и ADC тече ток I_1, а по диагонала AC – ток I_2, като

$$I_1 = \frac{U}{2R} = \frac{US}{2\rho l}, \quad I_2 = \frac{U}{R_1} = \frac{US}{\sqrt{2}\rho l}.$$



Фиг. 1.98

Силата, действаща на проводник с ток, се пресмята по формулата

$$F = BIl\sin\alpha.$$

Върху проводниците AD ($\alpha = 0$) и CB ($\alpha = \pi$) не действа сила, тъй като $\sin\alpha = 0$. Върху другите три проводника действат сили, насочени от листа към нас.

$$F_{AB} = F_{DC} = BI_1l = \frac{BUS}{2\rho} \qquad \left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$F_{AC} = BI_2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}l = \frac{BUS}{\sqrt{2}\rho} \qquad \left(\alpha = \frac{\pi}{4}\right)$$

Резултантната сила, която действа на квадрата, е

$$F = F_{AB} + F_{DC} + F_{AC} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{BUS}{\rho}.$$

Като отчетем, че $\rho = 0{,}017\ \frac{\Omega.mm^2}{m}$, намираме

$$F \approx 50\ N.$$

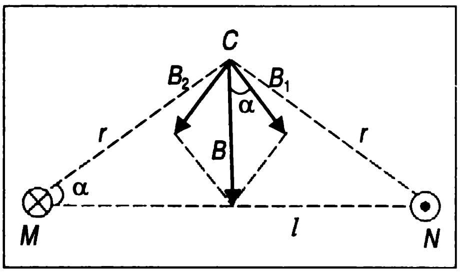
1.130. По два дълги успоредни проводника, които се намират на разстояние $l = 5$ cm един от друг, текат в противоположни посоки еднакви токове $I = 5$ A. Определете индукцията на магнитното поле в точка, намираща се на разстояние $r = 3$ cm от всеки от проводниците.

Дадено: $l = 5$ cm, $r = 3$ cm, $I = 5$ A

Да се намери: B

Решение

Всеки от проводниците създава магнитно поле в т. C и индукцията B на резултантното магнитно поле се намира по правилото на успоредника (фиг. 1.99). Магнитните силови линии са окръжности и B_1 е насочена по допирателната към окръжността с център т. M, която минава през т. C. Освен това B_1 е перпендикулярна на отсечката MC. Аналогично B_2



Фиг. 1.99

е перпендикулярна на отсечката NC. По големина двете величини са равни

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Търсената индукция B е насочена надолу и е перпендикулярна на отсечката MN. Тогава имаме (вж. фиг. 1.99)

$$\frac{\frac{B}{2}}{B_1} = \cos\alpha = \frac{\frac{l}{2}}{r},$$

$$B = \frac{B_1 l}{r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi r^2} \approx 6.10^{-5}\ \text{T}.$$

1.131. Три успоредни проводника лежат в една равнина и са разположени на разстояние r = 3 cm един от друг. По тях текат токове с еднакви посоки и големини съответно $I_1 = I_2$ и $I_3 = I_1 + I_2$. Определете положението на права, успоредна на проводниците, във всяка точка на която индукцията на резултантното магнитно поле е нула.

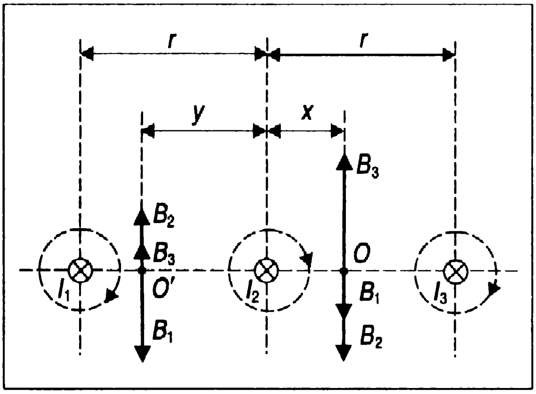
Дадено: r = 3 cm, $I_1 = I_2$, $I_3 = I_1 + I_2$
Да се намери: x
Решение

На фиг. 1.100 е показан напречен разрез на проводниците и картината на силовите линии при избраната посока на тока в тях. Вижда се, че в тази равнина съществуват две точки O и O', в които е възможно индукцията на полето да бъде нула. В точката O имаме

$$B_1 + B_2 = B_3,$$

а в точката O' –

$$B_1 = B_2 + B_3.$$



Фиг. 1.100

Да разгледаме първия случай. Индукцията на поле, създадено от безкрайно дълъг прав проводник с ток, е

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Тогава имаме

$$\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(r+x)} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi(r-x)},$$

където x е разстоянието между проводник 2 и т. O. Като заместим I_2 с I_1, $I_3 = 2I_1$ и извършим съкращаване, получаваме уравнението

$$\frac{1}{r+x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{r-x},$$

което може да се запише във вида

$$4x^2 + rx - r^2 = 0.$$

Неговите решения са

$$x_{1,2}=\frac{r}{8}(-1\pm\sqrt{17}),$$

$$x_1\approx 1{,}2\text{ cm},\quad x_2\approx -1{,}9\text{ cm},$$

от които смисъл има само решението $x_1\approx 1{,}2$ cm.

В точката O' имаме

$$\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(r-y)}=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi y}+\frac{\mu_0 I_3}{2\pi(r+y)},$$

където y е разстоянието между проводник 2 и т. O'. След съкращаване получаваме следното квадратно уравнение за y

$$4y^2-ry-r^2=0.$$

Неговите решения са

$$y_{1,2}=\frac{r}{4}(1\pm\sqrt{5}),$$

$$y_1\approx 2{,}4\text{ cm},\quad y_2=-0{,}9\text{ cm},$$

от които физичен смисъл има само решението y = 2,4 cm. Следователно магнитната индукция е нула във всички точки от права, успоредна на проводниците и лежаща в същата равнина на 1,2 cm вдясно от проводник 2 или на разстояние 2,4 cm вляво от него.

1.132. При каква потенциална разлика U е била ускорена частица с маса m = 0,5 g и заряд q = 20 μC, ако при движение в еднородно магнитно поле с индукция B = 5 mT ѝ действа сила $F = 10^{-5}$ N? Магнитната индукция е насочена перпендикулярно на скоростта на частицата. Началната скорост на частицата е нула.

Дадено: m = 0,5 g, q = 20 μC, B = 5 mT, $F = 10^{-5}$ N

Да се намери: U

Решение

След ускоряването частицата има скорост v и на нея ще действа сила

$$F=qvB.$$

Скоростта ще намерим, като приравним изменението на кинетичната енергия на частицата на работата, извършена от електричната сила

$$\frac{mv^2}{2}-0=qU,$$

откъдето следва

$$v=\sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

Като отчетем, че

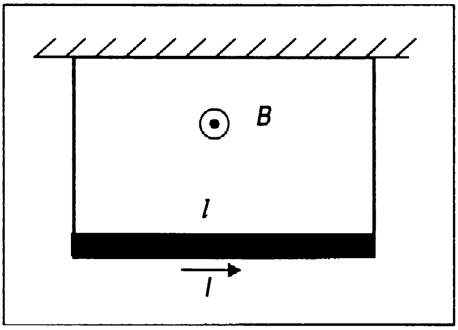
$$v=\frac{F}{qB},$$

след приравняване на двата израза за v получаваме

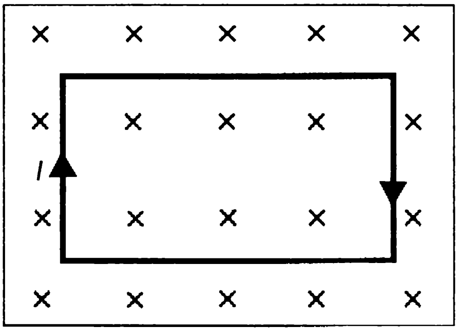
$$U=\frac{mF^2}{2q^3B^2}=125\text{ kV}.$$

Задачи

1.133. Прав проводник с дължина $l = 0{,}2$ m и маса $m = 5$ g е окачен хоризонтално на две нишки в еднородно магнитно поле с индукция $B = 4$ mT (фиг. 1.101). При какъв ток нишките ще се скъсат, ако те издържат максимална сила на опън $T = 3{,}9.10^{-2}$ N?



Фиг. 1.101



Фиг. 1.102

1.134. На фиг. 1.102 е показана правоъгълна рамка с ток в еднородно магнитно поле.

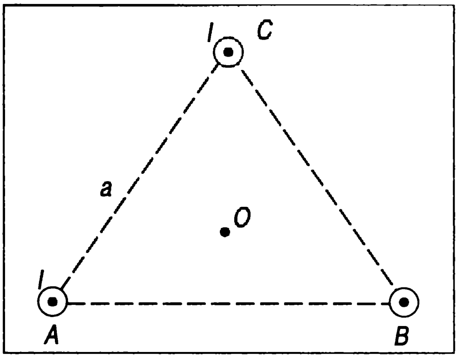
а) Начертайте силите, действащи на всяка страна на рамката.

б) Какъв е ефектът от действието на магнитното поле върху рамката?

в) Какво трябва да се направи, така че посоката на силите, действащи на всяка страна на рамката, да стане противоположна на началната?

* **1.135.** По три дълги успоредни проводника текат еднакви по посока и големина токове I. В перпендикулярна на проводниците равнина проекциите им лежат във върховете на равностранен триъгълник ABC със страна a (фиг. 1.103). Определете индукцията на магнитното поле B в центъра на триъгълника (пресечната точка на медианите).

1.136. По два дълги успоредни проводника, които се намират на разстояние $l = 5$ cm един от друг, текат в една и съща посока еднакви токове $I = 5$ A. Определете индукцията на магнитното поле B в точка, намираща се на разстояние $r = 3$ cm от всеки от проводниците.



Фиг. 1.103

1.137. Частица с маса $m = 10$ μg, заряд $q = $ μ1 C и нулева начална скорост се ускорява в еднородно електрично поле с интензитет $E = 10$ kV/m в продължение на време $\Delta t = 10$ s. След това тя навлиза в еднородно магнитно поле с индукция $B = 2{,}5$ T, перпендикулярна на скоростта на частицата. Намерете силата, с която магнитното поле действа на частицата.

Електромагнитна индукция

Законът на Фарадей за електромагнитната индукция гласи, че в затворен проводников контур се индуцира ток, когато с времето се изменя броят на индукционните линии на магнитното поле, които са обхванати от контура. Индуцираният ток е пропорционален на бързината, с която става изменението. Посоката на тока се определя по правилото на Ленц: **индуцираният ток винаги е насочен така, че да противодейства на причината, довела до неговото възникване.**

Величината, която е пропорционална на броя индукционни линии, пробождащи контура, се нарича **магнитен поток**. Когато магнитната индукция е перпендикулярна на площта S на контура, магнитният поток Φ се задава с формулата

$$\Phi = BS.$$

При нарастване на магнитния поток индуцираният ток има такава посока, че индукцията на създаденото от него магнитно поле има магнитен поток, който се стреми да компенсира нарастването на първоначалния магнитен поток.

При промяна на магнитния поток в затворен контур се индуцира ЕДН

$$\mathcal{E} = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \left|\frac{\Delta(BS)}{\Delta t}\right|,$$

като изменението на магнитния поток може да се дължи на изменение само на B, на изменение само на S или и на двете величини едновременно.

Около всяка намотка, по която протича ток, се създава магнитно поле, чийто магнитен поток е

$$\Phi = LI.$$

Промяната на тока I през намотка с индуктивност L води до поява на самоиндуцирано напрежение

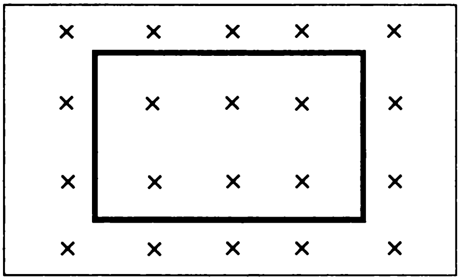
$$\mathcal{E} = L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Магнитното поле в намотката притежава енергия

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

ПРИМЕРИ

1.138. Проводников контур е поставен в магнитно поле, както е показано на фиг. 1.104. Индукцията B на магнитното поле започва да се увеличава. Определете посоката на индуцирания ток в контура. Какво трябва да се направи, за да се измени посоката на индуцирания ток?



Фиг. 1.104

Решение

При увеличаване на магнитната индукция B се увеличава броят на индукционните линии на магнитното поле, които пронизват контура, и в него възниква индуциран ток. Според правилото на Ленц този ток винаги е насочен така, че да „противодейства" на причината, довела до неговото възникване. Това означава, че индуцираният ток трябва да създава магнитно поле, чиито индукционни линии пронизват контура в противоположна посока, т.е. от листа към нас. Това се получава при посока на индуцирания ток, обратна на посоката на движение на часовниковата стрелка.

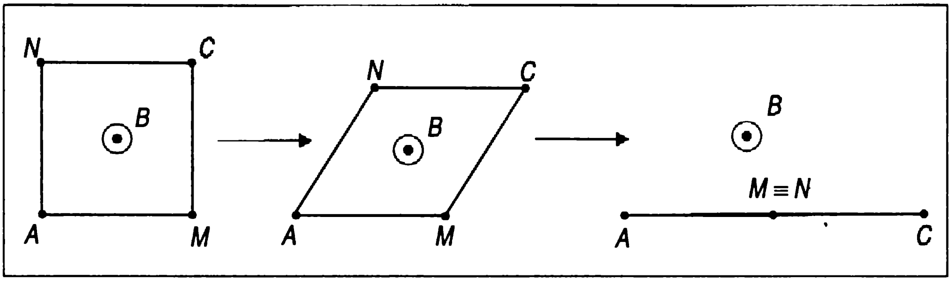
За да се промени посоката на индуцирания ток, трябва броят на индукционните линии, пронизващи контура, да намалява. Това се постига, ако индукцията B намалява.

1.139. Четири еднакви проводника, всеки с дължина l, са свързани шарнирно и образуват квадрат. Той е поставен в еднородно магнитно поле с индукция B, която е перпендикулярна на равнината на квадрата. Два от срещулежащите върхове на квадрата се опъват, докато той се превърне в прав проводник. Какъв електричен заряд ще премине по контура, ако съпротивлението на всеки от проводниците е $R/4$?

Дадено: l, B, R
Да се намери: q
Решение

На фиг. 1.105 са показани началното, едно междинно и крайното положение на проводниковия контур. При промяна на формата му се изменя площта S, която контурът обхваща. Това води до промяна на магнитния поток Φ през нея и до индуциране на ЕДН $\mathcal{E}$. Нека деформацията на контура става равномерно за време Δt. Тогава магнитният поток се изменя с

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = 0 - Bl^2 = -Bl^2.$$



Фиг. 1.105

Съгласно със закона на Фарадей за електромагнитната индукция

$$\mathcal{E} = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \frac{Bl^2}{\Delta t}.$$

Тъй като контурът е затворен, в него за време Δt ще тече ток

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

което означава, че през контура е преминал заряд

$$q = I\Delta t = \frac{Bl^2}{R}.$$

1.140. Намотка, състояща се от 400 навивки, се намира в магнитно поле. Магнитният поток Φ, който пронизва намотката, се променя с времето, както е показано на фиг. 1.106. Постройте графиката на зависимостта на индуцираното напрежение $\mathcal{E}$ в намотката от времето.

Дадено: $\Phi(t)$ – графично, $n = 400$
Да се намери: $\mathcal{E}$
Решение

От фиг. 1.106 се вижда, че магнитният поток първоначално расте, после не се променя, а след това намалява. Съгласно с пример 1.138 индуцираното напрежение в първия и в третия случай ще поражда ток с различни посоки. За да се отчете индуцираното напрежение в една навивка както по големина, така и по посока, законът за електромагнитната индукция се записва във вида

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Навивките са свързани последователно, което означава, че индуцираните напрежения в отделните навивки се събират

$$\mathcal{E} = -n\mathcal{E}_1 = -n\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Тогава за интервала $0 < t < 0{,}1$ s

$$\mathcal{E} = -n\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -400\frac{1.10^{-3}}{0{,}1}\text{V} = -4\text{V}.$$

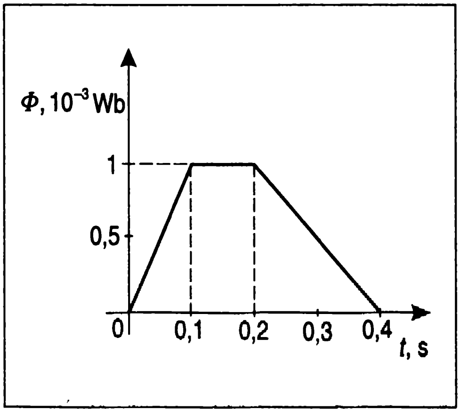
В интервала $0{,}1$ s $< t < 0{,}2$ s магнитният поток не се променя и

$$\mathcal{E} = 0.$$

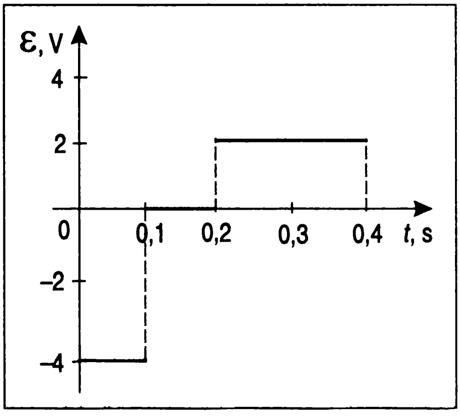
Когато $0{,}2$ s $< t < 0{,}4$ s, имаме

$$\mathcal{E} = -n\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -400\frac{(-1.10^{-3})}{0{,}2}\text{V} = 2\text{V}.$$

На фиг. 1.107 е показана графиката на $\mathcal{E}(t)$. Максималното индуцирано напрежение (по големина) е $|\mathcal{E}| = 4\text{V}$ и се наблюдава в интервала, в който магнитният поток се променя максимално за най-кратко време.

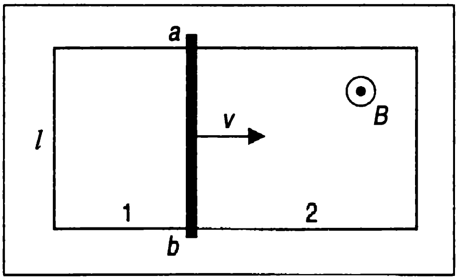


Фиг. 1.106



Фиг. 1.107

1.141. Правоъгълна проводникова рамка се намира в еднородно магнитно поле с индукция B, перпендикулярна на равнината на рамката. По рамката, успоредно на страните с дължина l, се плъзга с постоянна скорост v проводник ab със съпротивление R (фиг. 1.108). Определете тока през проводника ab. Съпротивлението на останалите части от рамката се пренебрегва.



Фиг. 1.108

Дадено: l, B, R, v
Да се намери: I
Решение

Проводникът ab разделя контура на два – контурът 1 е разположен вляво от ab, а контурът 2 – вдясно от ab. При движението на проводника площта на контура 1 се увеличава, а на контура 2 намалява. По същия начин се изменя магнитният поток, който пронизва контурите. В двата контура се индуцира напрежение съответно $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$. Токът I през проводника ab е

$$I = \frac{\mathcal{E}_1}{R} = \frac{\mathcal{E}_2}{R},$$

откъдето следва $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$. Индуцираното напрежение

$$\mathcal{E}_1 = \left|\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t}\right|.$$

Като отчетем, че за време Δt изменението на магнитния поток

$$\Delta\Phi_1 = B\Delta S_1 = Blv\Delta t,$$

намираме

$$\mathcal{E}_1 = Blv.$$

Окончателно получаваме

$$I = \frac{Blv}{R}.$$

1.142. При равномерното изменение на тока в соленоид от I_1 = 2,5 A до I_2 = 12,5 A магнитният поток се увеличава с $\Delta\Phi$ = 2,4 mWb. Соленоидът има n = 800 навивки. Намерете индуцираното напрежение, ако изменението на тока става за време Δt =15 s. С колко джаула се е изменила енергията на магнитното поле в соленоида?

Дадено: I_1 = 2,5 A, I_2 = 12,5, $\Delta\Phi$ = 2,4 mWb, n = 800, Δt = 15 s
Да се намери: $\mathcal{E}$, W
Решение

При равномерно изменение на тока с времето индуцираното напрежение е постоянно, тъй като изменението на магнитния поток е пропорционално на Δt. Индуцираното в намотката напрежение е (вж. пример 1.140)

$$\mathcal{E} = n\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = 12{,}8 \text{ V}.$$

В началния момент магнитното поле в намотката има енергия

$$W_1 = \frac{LI_1^2}{2},$$

а в крайния момент

$$W_2 = \frac{LI_2^2}{2}.$$

Тогава изменението на енергията е

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{L(I_2^2 - I_1^2)}{2} = \frac{L(I_2 - I_1)(I_2 + I_1)}{2}.$$

Като отчетем, че

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = L(I_2 - I_1),$$

получаваме

$$\Delta W = \frac{\Delta\Phi(I_2 + I_1)}{2} = 18 \text{ mJ}.$$

1.143. Паралелно свързани намотка с индуктивност L и резистор със съпротивление R са включени чрез ключ K към батерия с ЕДН $\mathcal{E}$ и вътрешно съпротивление r (фиг. 1.109). Първоначално ключът K е отворен и във веригата не протича електричен ток. Определете заряда, който ще премине през резистора след затварянето на ключа K. Съпротивлението на намотката се пренебрегва.

Дадено: L, R, $\mathcal{E}$, r
Да се намери: q
Решение

През резистора със съпротивление R ще протича електричен ток I_1, докато токът I_2 през намотката се изменя поради самоиндукция. Когато токът I_2 достигне максимална стойност $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r}$, токът през съпротивлението става нула, тъй като то е свързано на късо чрез намотката. За време Δt през резистора преминава заряд $\Delta q = I_1\Delta t$. Напрежението между краищата на резистора и на намотката е

$$\mathcal{E}_1 = L\left|\frac{\Delta I_2}{\Delta t}\right| = I_1 R.$$

Тогава имаме

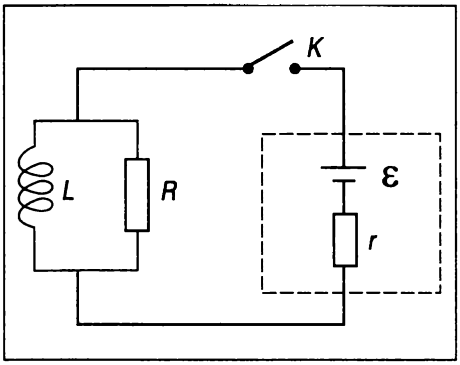
$$\Delta q = I_1\Delta t = \frac{L}{R}\Delta I_2.$$

Като отчетем, че

$$\Delta I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r} - 0 = \frac{\mathcal{E}}{r}, \quad \Delta q = q - 0,$$

за преминалия през резистора заряд получаваме

$$q = \frac{L\mathcal{E}}{Rr}.$$



Фиг. 1.109

Задачи

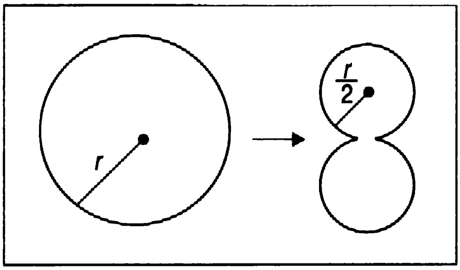
1.144. Ще възниква ли индукционен ток в навивка, намираща се в еднородно магнитно поле, перпендикулярно на нейната равнина, ако:

а) навивката се премества постъпателно;

б) навивката се върти около ос, перпендикулярна на равнината ѝ, която минава през нейния център;

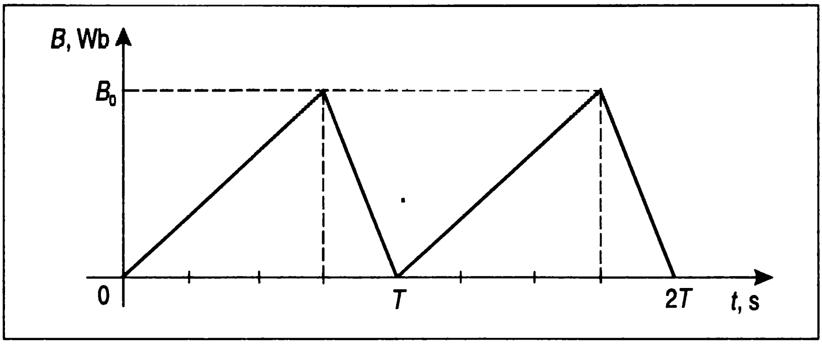
в) навивката се върти около ос, която лежи в нейната равнина?

1.145. Кръгова навивка с радиус r е направена от проводник със съпротивление на единица дължина ρ. Тя се намира в еднородно магнитно поле, чиято индукция е перпендикулярна на равнината на навивката. В същата равнина навивката се деформира до осморка, съставена от две еднакви окръжности (фиг. 1. 110). Какъв по големина заряд преминава по проводника?



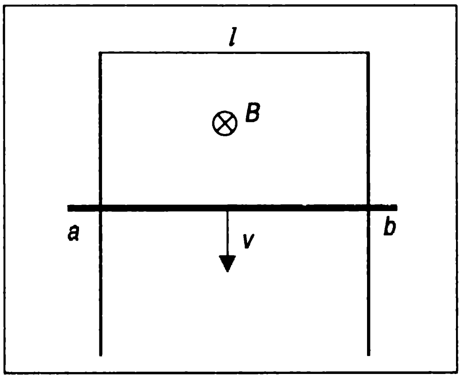
Фиг. 1.110

1.146. Еднородно магнитно поле, чиито индукционни линии са перпендикулярни на сечението S на намотка с n навивки, се изменя с времето, както е показано на фиг. 1.111. Постройте графиката на зависимостта на индуцираното напрежение от времето.



Фиг. 1.111

1.147. В еднородно магнитно поле с индукция $B = 0{,}01$ T са разположени вертикално на разстояние $l = 50$ cm една от друга две метални релси, дадени на късо с проводник в горния край (фиг. 1.112). Равнината, в която се намират релсите, е перпендикулярна на индукцията на магнитното поле. По релсите се спуска с постоянна скорост $v = 1$ m/s прав проводник ab с маса $m = 1$ g. Определете съпротивлението R на проводника ab, ако триенето между



Фиг. 1.112

релсите се пренебрегва. Съпротивлението на останалата част от системата също се пренебрегва.

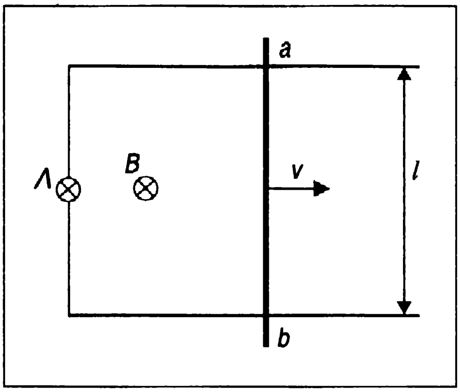
Упътване. При спускането на проводника ab през него протича индуциран ток. Магнитното поле действа на проводника с ток със сила на Ампер, която уравновесява силата на тежестта.

1.148. Две успоредни проводящи релси са свързани с лампа със съпротивление $R = 100\ \Omega$. Разстоянието между релсите е $l = 10$ cm. Цялата система се намира в еднородно магнитно поле с индукция $B = 0{,}2$ T, перпендикулярна на равнината, в която лежат релсите. Когато на проводника ab действа сила $F = 10\ \mu$N, той се движи с постоянна скорост (фиг. 1.113). Определете:

а) скоростта на проводника ab;

б) консумираната от лампата мощност.

Съпротивлението на всички елементи във веригата, освен на лампата, се пренебрегва.



Фиг. 1.113

1.149. Намотка със съпротивление $R = 20\ \Omega$ и индуктивност $L = 0{,}01$ H се намира в променливо магнитно поле. Когато създаваният от това поле магнитен поток се увеличи с $\Delta\Phi = 1$ mWb, токът в намотката нараства с $\Delta I = 50$ mA. Определете какъв по големина заряд преминава за това време през намотката.

Променлив ток. Трансформатори

Променливо се нарича електричното напрежение, което през равни интервали от време променя своята големина (и полярност). Когато между краищата на резистор е приложено променливо напрежение, през него протича променлив ток, който се променя по големина (и посока). Моментните стойности на тока $i(t)$ и на напрежението $u(t)$ са свързани чрез закона на Ом

$$i(t) = \frac{u(t)}{R},$$

където R е съпротивлението на резистора. Основните характеристики на променливото напрежение и променливия ток са съответно амплитуда U_{max} и I_{max}, период T и честота $\nu = \frac{1}{T}$.

Когато консуматор е свързан към променливо електрично напрежение, в него се отделя променлива електрична мощност

$$p(t) = u(t)\,i(t).$$

Тъй като стойностите на мощността се повтарят, за работата на много консуматори е важна т.нар. средна мощност. Тя се определя от работата A, извършена от тока за 1 период, разделена на T.

$$P_{ср} = \frac{A}{T}.$$

Важни характеристики на променливите ток и напрежение са ефективните им стойности $I_{еф}$ и $U_{еф}$. Те се определят като стойности на постоянен ток и постоянно напрежение, при които консумираната от резистор мощност съвпада със средната мощност на променливия ток за един период

$$P_{ср} = \frac{U_{еф}^2}{R} = I_{еф}^2 R.$$

За синусоидално изменящи се ток и напрежение, каквито са мрежовото напрежение и породеният от него ток през резистор, имаме

$$U_{еф} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}, \quad I_{еф} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}.$$

Трансформатори се наричат устройствата, които преобразуват променливо напрежение с определена ефективна стойност и честота в променливо напрежение с друга ефективна стойност, но със същата честота. Характеристики на всеки трансформатор са броят на навивките N_1 в първичната намотка и броят на навивките N_2 във вторичната намотка. Коефициент на трансформация k се нарича отношението на изходното U_2 към входното напрежение U_1 на трансформатора

$$k = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1},$$

когато във вторичната намотка не е включен консуматор и трансформаторът работи в режим на празен ход. Трансформаторът се нарича повишаващ при $k > 1$ и понижаващ – при $k < 1$.

Работата на всеки трансформатор се характеризира с КПД η, който се определя като отношение на изходната P_2 към входната P_1 мощност

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}.$$

За идеален трансформатор, когато се пренебрегват топлинните загуби, имаме $\eta = 1$, откъдето следва

$$U_1 I_1 = U_2 I_2,$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1} = k.$$

ПРИМЕРИ

1.150. Запалващото напрежение на газоразрядна лампа е 250 V. Определете времето в един период, през което тя ще свети, ако ѝ е подадено мрежово напрежение от 220 V.

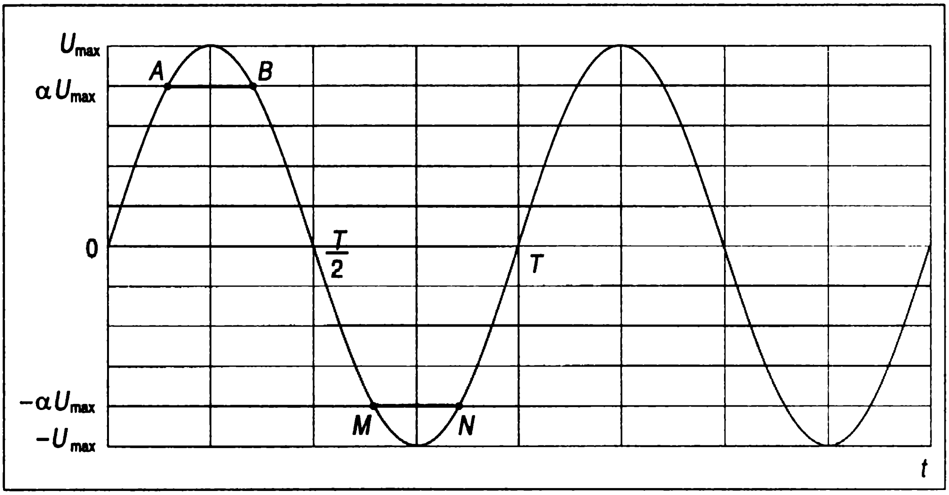
Дадено: $U_0 = 250$ V, $U_{еф} = 220$ V.

Да се намери: τ

Решение

Мрежовото напрежение е променливо и графиката му в зависимост от времето е представена със синусоида (фиг. 1.114). Максималната стойност на променливото напрежение е

$$U_{max} = U_{еф}\sqrt{2} = 220\sqrt{2} = 310 \text{ V}.$$



Фиг. 1.114

Периодът на променливото напрежение, съответстващ на честота $\nu = 50$ Hz, е

$$T = \frac{1}{\nu} = 0{,}02 \text{ s}.$$

Лампата ще свети, когато моментното напрежение е

$$u(t) \geq 250 \text{ V}.$$

Намирането на търсения интервал от време ще направим графично. Тъй като

$$\alpha = \frac{U_0}{U_{max}} = \frac{250}{310} \approx 0{,}78,$$

на височина $\pm\alpha U_{max}$ начертаваме хоризонтални прави, които пресичат графиката в точките A, B и M, N. Определяме каква част от периода T е сумата от дължините на отсечките AB и MN, т.е. имаме

$$\beta = \frac{t_{AB} + t_{MN}}{T} \approx 0{,}4.$$

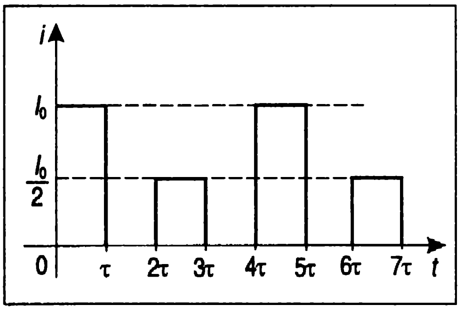
Тогава получаваме

$$\tau = \beta T \approx 0{,}4T \approx 0{,}008 \text{ s}.$$

1.151. Определете ефективната стойност на променлив ток, чиято зависимост от времето е показана на фиг. 1.115.

Дадено: I_0, τ, графика на тока
Да се намери: $I_{еф}$
Решение

Както се вижда от фиг. 1.115, периодът на променливия ток е $T = 4\tau$. През този интервал от време токът има постоянна стойност I_0 за $0 \leq t \leq \tau$ и $\frac{I_0}{2}$ за $2\tau \leq t \leq 3\tau$. Извършената от него работа



Фиг. 1.115

за един период при протичането му през резистор със съпротивление R е

$$A = I_0^2 R\tau + \left(\frac{I_0}{2}\right)^2 R\tau = \frac{5}{4} I_0^2 R\tau.$$

Средната отделена мощност за един период е

$$P_{ср} = \frac{A}{T} = \frac{5}{16} I_0^2 R.$$

Тя трябва да е равна на мощността на постоянен ток $I_{еф}$

$$P_{ср} = I_{еф}^2 R.$$

След като приравним двата израза за $P_{ср}$, намираме

$$I_{еф} = \frac{\sqrt{5}}{4} I_0.$$

1.152. Токът в резистор се променя с времето, както е показано на фиг. 1.116. Ефективната стойност на тока е $I_{еф} = 2$ A. Пресметнете електричния заряд, който преминава през напречното сечение на резистора за един час.

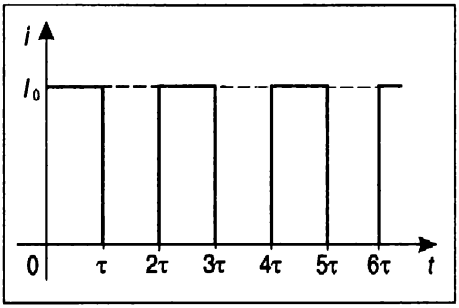
Дадено: $I_{еф} = 2$ A, $\Delta t = 1$ h
Да се намери: q
Решение

Променливият електричен ток има период $T = 2\tau$. През проводника за един период протича електричен заряд

$$q_1 = I_0\tau.$$

За време Δt ще протече заряд

$$q = nq_1 = \frac{\Delta t}{2\tau} I_0\tau = \frac{I_0 \Delta t}{2}.$$



Фиг. 1.116

Тук n е броят на периодите в интервала Δt. За да намерим q, трябва да определим I_0 по дадената ефективна стойност. За един период токът извършва работа

$$A = I_0^2 R\tau.$$

Тогава средната консумирана от резистора мощност е

$$P_{ср} = \frac{A}{2\tau} = \frac{I_0^2 R}{2}.$$

От друга страна,

$$P_{ср} = I_{еф}^2 R,$$

откъдето след като приравним десните страни на $P_{ср}$, намираме

$$I_0 = \sqrt{2} I_{еф}.$$

Окончателно получаваме

$$q = \frac{I_{еф}\Delta t}{\sqrt{2}} \approx 5{,}1.10^3 \text{ C}.$$

1.153. На първичната намотка на понижаващ трансформатор с коефициент на трансформация $k = \frac{1}{8}$ е подадено мрежово напрежение $U_1 = 220$ V. Съпротивлението на проводника, от който е направена вторичната намотка, е $R_2 = 2\ \Omega$. Към вторичната намотка е свързан консуматор и токът в нея е $I_2 = 3$ A. Определете напрежението между изводите на вторичната намотка.

Дадено: $U_1 = 220$ V, $R_2 = 2\ \Omega$, $I_2 = 3$ A, $k = \frac{1}{8}$

Да се намери: U_2

Решение

Когато трансформаторът работи на празен ход, напрежението на изводите на вторичната намотка не зависи от съпротивлението на тази намотка и е равно на U_2', като

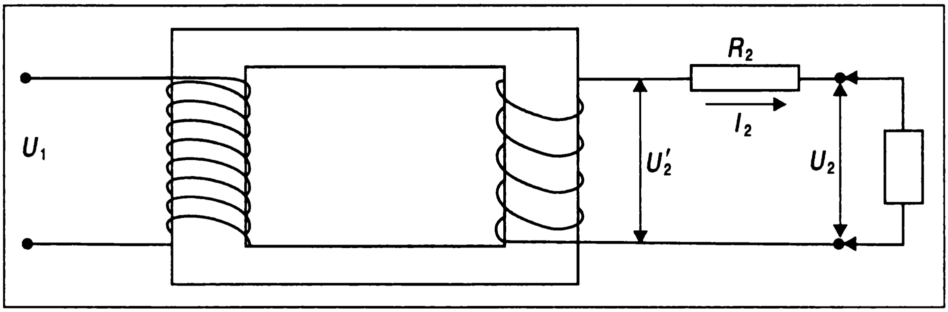
$$\frac{U_2'}{U_1} = k.$$

На фиг. 1.117 е показана еквивалентната схема. Напрежението

$$U_2' = U_2 + I_2R_2,$$

откъдето следва

$$U_2 = U_2' - I_2R_2 = kU_1 - I_2R_2 = 21{,}5 \text{ V}.$$



Фиг. 1.117

1.154. Първичната намотка на понижаващ трансформатор е включена в мрежа с напрежение $U_1 = 220$ V. Напрежението между изводите на вторичната намотка е $U_2 = 20$ V, съпротивлението ѝ е $R_2 = 1\ \Omega$, а токът в нея – $I_2 = 2$ A. Определете коефициента на трансформация и КПД на трансформатора.

Дадено: $U_1 = 220$ V, $U_2 = 20$ V, $R_2 = 1\ \Omega$, $I_2 = 2$ A

Да се намери: k, η

Решение

Коефициентът на трансформация е

$$k = \frac{U_2'}{U_1},$$

където U_2' е напрежението между изводите на вторичната намотка, когато трансформаторът работи на празен ход. Като отчетем, че (вж. пример 1.153)

$$U_2' = U_2 + I_2R_2,$$

намираме

$$k = \frac{U_2 + I_2R_2}{U_1} = 0{,}1.$$

По определение КПД на трансформатор е

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{I_2U_2}{I_1U_1},$$

където P_2 е консумираната мощност във вторичната намотка, а P_1 – в първичната намотка. Като пренебрегнем топлинните загуби (т.е. приемаме, че $\eta \approx 1$), имаме

$$\frac{I_1}{I_2} \approx \frac{U_2}{U_1} = k.$$

Тогава, след като заместим, получаваме

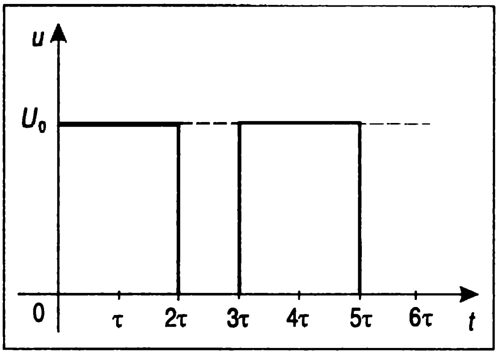
$$\eta = \frac{U_2}{kU_1} \approx 0{,}91.$$

Коментар. Резултатът за η = 0,91 е в съгласие с предположението за практическа липса на топлинни загуби.

Задачи

1.155. Неонова лампа свети, когато напрежението между електродите ѝ е равно на мрежовото напрежение. През каква част от периода ще свети такава лампа?

1.156. Определете ефективната стойност на променливо напрежение, чиято графика в зависимост от времето е показана на фиг. 1.118.



Фиг. 1.118

1.157. Първичната намотка за захранване на радиоприемник има N_1 = 12 000 навивки и е включена към мрежа с променливо напрежение U_1 = 120 V. Съпротивлението на вторичната намотка е R_2 = 0,5 Ω. Напрежението във веригата на радиоприемника (т.е. във вторичната намотка) е U_2 = 3,5 V при ток I_2 = 1 A. Какъв брой навивки има вторичната намотка на трансформатора?

1.158. На първичната намотка на понижаващ трансформатор с коефициент на трансформация $k = \frac{1}{11}$ е подадено променливо напрежение U_1 = 220 V. Съпротивлението на вторичната намотка е R_2 = 2 Ω, а токът в нея е I_2 = 5 A. Намерете съпротивлението на резистора, свързан към вторичната намотка на трансформатора, и напрежението между нейните изводи.

1.159. Понижаващ трансформатор с коефициент на трансформация k = 0,1 е включен във верига с напрежение U_1 = 220 V. Колко волта е напрежението U_2 на изхода на трансформатора, ако съпротивлението на вторичната му намотка е R_2 = 0,2 Ω, а съпротивлението на свързания към нея резистор е R = 2 Ω?

1.160. Трансформатор има коефициент на полезно действие 95 %. Токът в първичната намотка е 0,5 A при напрежение 220 V. Определете какъв ток протича във вторичната намотка, ако напрежението между краищата ѝ е 9,5 V.

ХАРМОНИЧНО ТРЕПТЕНЕ

Пружинно и математично махало

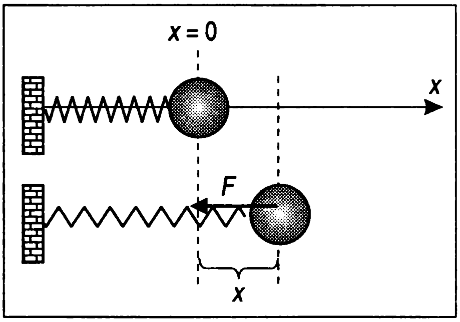
Хармоничното трептене е периодично движение, което възниква при малко отклонение на дадено тяло от неговото положение на **устойчиво равновесие**. Трептенето се дължи на **връщаща сила** F, която е пропорционална на големината на отместването $|x|$ на тялото спрямо равновесното му положение

$$F = k|x|.$$

Това съотношението е известно като закон на Хук. Коефициентът на пропорционалност k се измерва с единици нютон върху метър (N/m). Връщащата сила може да бъде резултат както от взаимодействие с едно-единствено тяло, така и равнодействаща на няколко сили. Система, в която връщащата сила се дължи на деформация на пружина или друго еластично тяло (фиг. 2.1), се нарича **пружинно махало**, а коефициентът k – **коефициент на еластичност** на пружината. Зависимостите на периода T и честотата ν на трептенето от масата m на окаченото тяло се дават с формулите

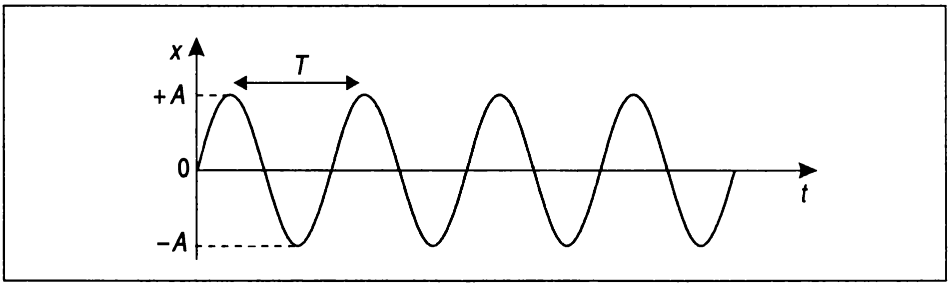
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$



Фиг. 2.1

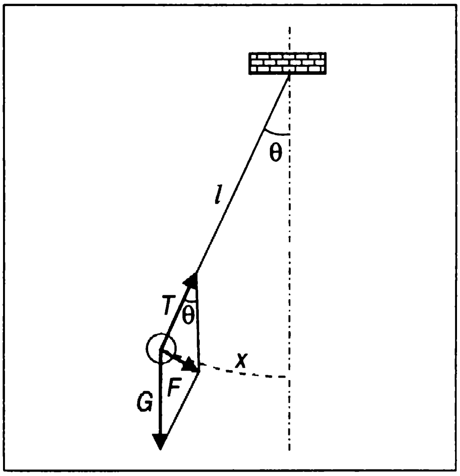
Законът за движение при хармонично трептене се изобразява графично с вълнообразна крива, наречена синусоида (фиг. 2.2). Максималното отклонение A се нарича **амплитуда** на трептенето. Периодът на трептенето е числено равен на разстоянието между два максимума или два минимума на синусоидата.



Фиг. 2.2

Математично махало се нарича система, която се състои от тяло с малки размери (материална точка), окачено на неразтеглива нишка с пренебрежимо малка маса. Връщащата сила F е равнодействаща на силата на тежестта G и силата на опъване T на нишката. Тя е насочена перпендикулярно на нишката, понеже нишката е неразтеглива, а големината ѝ се определя от правилото на успоредника (фиг. 2.3)

$$F = mg\sin\theta.$$



Фиг. 2.3

Забележете, че на чертежа с T е означена сила, за разлика от по-горе, където с T е означен периодът на махалото. Когато ъгълът на отклонение θ на нишката не превишава 30°, с относителна грешка, по-малка от 1 %, може да се използва приблизителната формула

$$\sin\theta \approx \frac{x}{l},$$

където x е дължината на дъгата, която описва тялото при отклонение от равновесното му положение. Тогава връщащата сила е приблизително правопропорционална на отклонението

$$F \approx \frac{mg}{l}x = kx,$$

Трептенето в такъв случай е хармонично, т.е. неговият период на практика не зависи от амплитудата и се дава с формулата

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Положението на устойчиво равновесие на дадено тяло се характеризира с минимална стойност на неговата потенциална енергия $E_п$. Обикновено тази минимална стойност на $E_п$ се приема за нула. При отклонение от равновесието тялото придобива допълнителна потенциална енергия, която се дава с израза

$$E_п = \frac{kx^2}{2}$$

в случая, когато е изпълнен законът на Хук. Следователно при хармонично трептене потенциалната енергия на тялото е най-голяма при максимално отместване ($x = \pm A$) от равновесното му положение. Ако няма триене, пълната механична енергия на тялото по време на трептенето остава постоянна

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}.$$

ПРИМЕРИ

2.1. Пружината на силомер се разтяга с 1,0 cm под действие на сила 1,0 N. С какъв период трепти около равновесното си положение тяло с маса 100 g, окачено на пружината на силомера?

Дадено: $F = 1{,}0$ N, $x = 1{,}0$ cm, $m = 100$ g
Да се намери: T
Решение

Съгласно със закона на Хук разтягането x на пружината на силомера е пропорционално на приложената към нея сила F. Следователно коефициентът на еластичност на пружината е

$$k = \frac{F}{x}.$$

По формулата за период на пружинно махало намираме

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mx}{F}} \approx 0{,}20\,\text{s}.$$

Обърнете внимание, че крайният резултат е закръглен до втората цифра след десетичната запетая, защото числените стойности на силата и на големината на разтягането са зададени само с две значещи цифри. Оттук следва, че резултат, записан като $T = 0{,}1985904$ s, е неприемлив от физична гледна точка, тъй като не отговаря на реалната точност на данните от условието.

2.2. Тяло, окачено на хоризонтална пружина, трепти с честота 10 Hz. Колко е ускорението на тялото при деформация на пружината с 1,0 cm?

Дадено: $\nu = 10$ Hz, $x = 1{,}0$ cm
Да се намери: a
Решение

В хоризонтална посока върху тялото действа единствено силата на еластичност $F = k|x|$, където x е големината на деформацията (вж. фиг. 2.1). Връзката между ускорението на тялото и деформацията на пружината може да бъде установена от II принцип на Нютон

$$a = \frac{F}{m} = \frac{k|x|}{m}.$$

В условието коефициентът на еластичност k на пружината и масата m на тялото не са дадени поотделно. Ние обаче можем да намерим отношението k/m, като използваме формула за честота на пружинно махало

$$\frac{k}{m} = 4\pi^2\nu^2.$$

Оттук намираме

$$a = 4\pi^2\nu^2\,|x| \approx 39\ \text{m/s}^2.$$

Връзката между ускорението на тялото и отклонението от равновесното му положение е в сила не само за пружинно махало, но и за произволно тяло, което трепти хармонично, и ще бъде използвана като известен резултат в следващите задачи.

2.3. Обикновените механични и електронни везни не могат да бъдат използвани за претегляне на телата в състояние на безтегловност. За тази цел в космически кораб се използва контейнер с известна маса 0,4 kg, който е закрепен към пружина. Когато е празен, контейнерът трепти с честота 3,0 Hz. В контейнера е поставено тяло с неизвестна маса, при което той продължава да трепти с честота 2,0 Hz.

а) Намерете коефициента на еластичност на пружината.

б) Колко е масата на поставеното тяло?

Дадено: $m_1 = 0{,}4$ kg, $\nu_1 = 3{,}0$ Hz, $\nu_2 = 2{,}0$ Hz
Да се намери: k, m_2
Решение

а) От формулата за честотата на пружинно махало намираме коефициента на еластичност на пружината

$$k = (2\pi\nu_1)^2 m_1 \approx 140 \text{ N/m}.$$

б) След поставяне на допълнително тяло с маса m_2 общата маса на трептящата система става $m_1 + m_2$, а честотата ѝ –

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}.$$

Като заместим израза за коефициента на еластичност, получен в т. а), намираме

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}.$$

Оттук след алгебрични преобразования намираме

$$m_2 = m_1\left\{\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 - 1\right\} = 0{,}5\text{kg}.$$

2.4. Различава ли се периодът на трептене на вертикално пружинно махало от периода на същото махало, когато е разположено хоризонтално?

Дадено: m, k
Да се намери: T
Решение

В случай на вертикално пружинно махало върху окаченото тяло действат две сили: силата на еластичност $F_{ел}$ на пружината и силата на тежестта G.

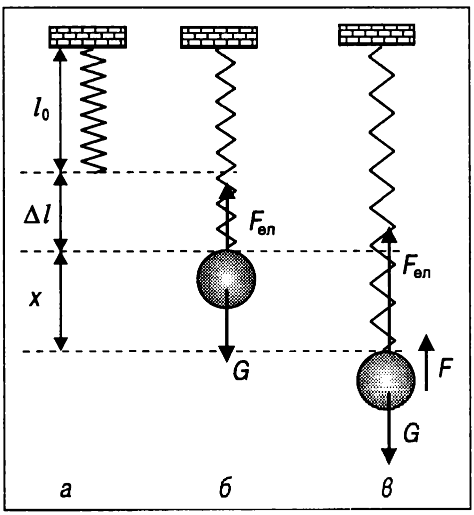
Ще означим с l_0 дължината на пружината в недеформирано състояние (фиг. 2.4, *а*), а с Δl нейното удължение, когато махалото се намира в равновесие (фиг. 2.4, *б*). От условието за равновесие

$$F_{ел} = G$$

получаваме:

$$k\Delta l = mg$$

или $\Delta l = \dfrac{mg}{k}.$



Фиг. 2.4

Нека разгледаме отклонение x на теглилката от равновесното ѝ положение (фиг. 2.4, *в*). Тогава удължението на пружината става $\Delta l_1 = \Delta l + x$ и силата на еластичност нараства до $F_{ел} = k\Delta l_1 = mg + kx$, където използвахме получения израз за удължението Δl. Както се вижда от фиг. 2.4, *в*, равнодействаща F на силите $F_{ел}$ и G е насочена към равновесното положение и нейната големина е

$$F = F_{ел} - G = kx.$$

Ние получихме, че равнодействащата сила е пропорционална на отклонението от равновесното положение с коефициент на пропорционалност, равен на коефициента на еластичност на пружината. Оттук следва, че периодът на трептене на вертикалното махало е същият, както ако то беше разположено хоризонтално, и се дава с формулата

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Този резултат може да бъде лесно обобщен. Ако върху тялото на едно пружинно махало е приложена постоянна по големина и по посока сила, то под нейно действие се променя единствено равновесната дължина на пружината, но периодът на трептенето остава същият.

2.5. Получете приблизителна формула за периода на трептене на пружинно махало, ако приемете, че то се връща в равновесно положение под действие на постоянна сила.

Дадено: m, k
Да се намери: T
Решение

Нека приемем, че в началния момент пружината е максимално деформирана, а окаченото тяло е неподвижно. Под действие на силата на еластичност тялото се ускорява, докато достигне равновесното си положение. В началния момент силата на еластичност е $F_1 = kA$, където A е амплитудата на трептенето. При преминаване през равновесно положение пружината не е деформирана и силата на еластичност е $F_2 = 0$. Ще приемем, че докато достигне положението на равновесие, върху тялото действа постоянна средна сила

$$F_{ср} = \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{kA}{2}.$$

Под действие на тази сила тялото би се движило равноускорително с ускорение

$$a = \frac{F_{ср}}{m} = \frac{kA}{2m}.$$

Пътят, който тялото изминава, докато достигне равновесното си положение, е равен на амплитудата на трептенето: $s = A$. От закона за равноускорителното движение с нулева начална скорост намираме времето, за което тялото би достигнало равновесното положение

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 2\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

В рамките на един период тялото изминава 4 пъти разстоянието между всяка точка на крайно отклонение и равновесното положение. Следователно

$$T = 4t = 8\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 2{,}5\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Виждаме, че приблизителният резултат се различава от точната формула за период на пружинно махало с 25 %. Това опростено решение обаче ни позволява да разберем защо периодът на хармоничното трептене не зависи от амплитудата. Лесно можем да се убедим, че ако законът на Хук не е изпълнен, т.е. връщащата сила зависи по друг закон от отклонението, периодът на трептенето би зависил от големината на началното отклонение.

2.6. На фиг. 2.5 е показана част от синусоида, която изобразява закона за движение на тяло, което трепти хармонично. Като използвате графиката, намерете:

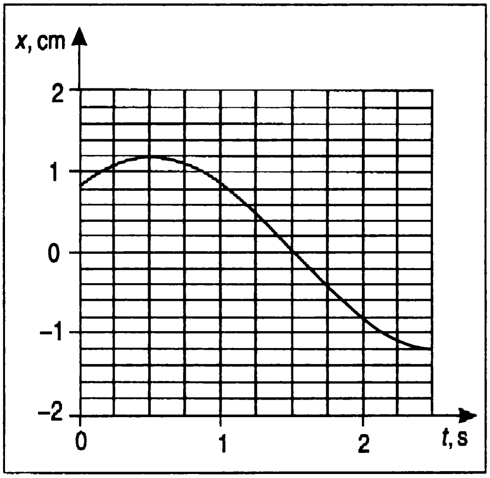
а) амплитудата на трептене;

б) периода и честотата на трептене;

в) максималната скорост на тялото.

Да се намери: A, T, ν, v_{max}

Решение



Фиг. 2.5

а) Амплитудата A е равна на максималното отклонение $|x_{max}|$ на тялото от равновесното му положение. От графиката виждаме, че отклонението е максимално в момента $t_1 = 0{,}5$ s

$$A = x(0{,}5) = 1{,}2 \text{ cm} = 1{,}2.10^{-2} \text{ m}.$$

б) Тялото преминава през равновесното си положение ($x = 0$) в момента $t_2 = 1{,}5$ s. Интервалът от време $\Delta t = t_2 - t_1$, за който тялото стига от своето крайно отклонение ($x = \pm A$) до равновесното си положение, е равен на една четвърт от периода на трептене. Следователно

$$T = 4\Delta t = 4.(1{,}5 \text{ s} - 0{,}5 \text{ s}) = 4{,}0 \text{ s}$$

и $$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{4{,}0 \text{ s}} = 0{,}25 \text{ Hz}.$$

в) В случая, когато законът за скоростта не е известен, определяме скоростта, като използваме закона за запазване на енергията. При максимално отклонение от равновесно положение ($x = \pm A$) скоростта на тялото е нула и следователно

$$E = \frac{kA^2}{2}.$$

От друга страна, скоростта е максимална ($v = v_{max}$) при преминаване през равновесно положение ($x = 0$). Следователно

$$E = \frac{mv_{max}^2}{2}.$$

След като приравним двата израза за пълната енергия, намираме

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \text{ или}$$

$$v_{max} = A\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

От формулата за честотата имаме

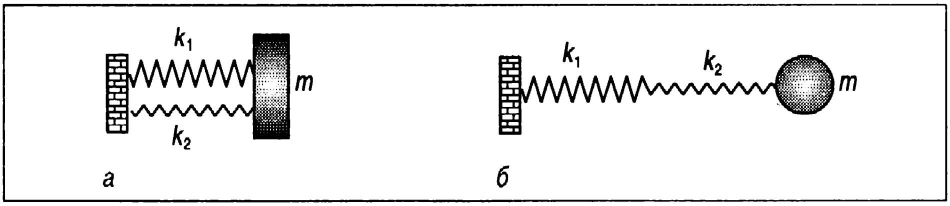
$$\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi\nu,$$

откъдето намираме

$$v_{max} = 2\pi\nu A = 1{,}9.10^{-2}\ \mathrm{m/s}.$$

Обърнете внимание, че резултатът е представен с толкова значещи цифри, колкото съответстват на точността на данните, получени от графиката. Получената формула, която свързва максималната скорост с амплитудата и честотата, е в сила за всяка система, която трепти хармонично – пружинно махало, математично махало при малък ъгъл на отклонение и т.н. В следващите задачи тази връзка ще бъде използвана като известен резултат.

2.7. Получете изрази за честотите на трептене на тяло с маса m, прикрепено към две пружини с коефициенти на еластичност съответно k_1 и k_2 по начините, показани на фиг. 2.6.

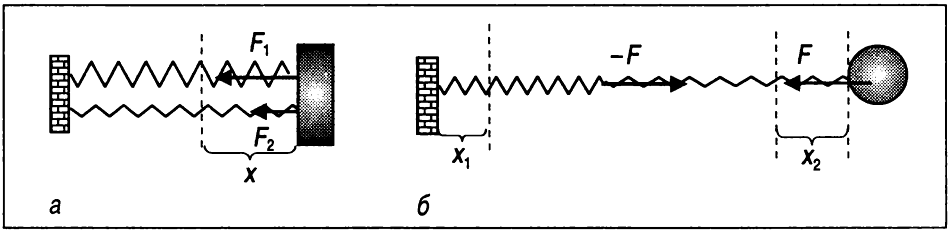


Фиг. 2.6

Дадено: m, k_1, k_2
Да се намери: ν_1, ν_2
Решение

а) По аналогия с електрическите вериги можем да кажем, че пружините, показани на фиг. 2.6, *а*, са свързани успоредно. При отместване x на тялото двете пружини едновременно се разтягат (свиват) с $\Delta l = |x|$ (вж. фиг. 2.7, *а*). Силите на еластичност F_1 и F_2, с които пружините действат върху окаченото тяло, са еднопосочни и тяхната равнодействаща е $F = F_1 + F_2$. От закона на Хук следва, че

$$F = (k_1 + k_2)|x|.$$



Фиг. 2.7

Следователно двете успоредно свързани пружини действат върху тялото с такава сила, с каквато би действала една пружина с еквивалентен коефициент на еластичност

$$k = k_1 + k_2.$$

От формулата за честотата на пружинно махало намираме

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}.$$

б) По аналогия с електрическите вериги можем да приемем, че пружините, показани на фиг. 2.6, *б*, са свързани последователно. Нека при отместване x на тялото двете пружини се удължават съответно с Δl_1 и Δl_2 (фиг. 2.7, *б*). От закона на Хук следва, че силата на еластичност F, с която пружината 2 действа върху тялото, е $F = k_2\Delta l_2$ или

$$\Delta l_2 = \frac{F}{k_2}.$$

Със същата по големина, но противоположна по посока сила пружината 2 действа върху пружината 1 и я разтяга с

$$\Delta l_1 = \frac{F}{k_1}.$$

Отместването x на теглилката е сума от големините на деформациите на двете пружини: $x = \Delta l_1 + \Delta l_2$, или

$$x = F\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right).$$

Оттук следва, че действието на двете последователно свързани пружини е еквивалентно на действието на една пружина с коефициент на еластичност k такъв, че

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2} \quad \text{или} \quad k = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}.$$

От формулата за честотата на пружинно махало намираме окончателно

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}}.$$

Както виждаме, формулите за еквивалентния коефициент на еластичност при последователно или успоредно свързване на пружини са подобни на формулите за еквивалентен капацитет на система от два кондензатора.

2.8. Периодът на математично махало близо до земната повърхност е $T = 1{,}5$ s.

а) Какъв ще бъде периодът на махало със същата дължина, ако то се намира на повърхността на Луната? Ускорението на свободно падане близо до лунната повърхност е 6 пъти по-малко от земното ускорение g.

б) При каква дължина l_1 на махалото, намиращо се на Луната, неговият период ще бъде равен на T?

Дадено: $T = 1{,}5$ s, $g = 9{,}8$ m/s^2, $g_1 = \dfrac{g}{6}$

Да се намери: T_1, l_1

Решение

а) Близо до повърхността на Земята периодът на махалото е

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

където g е земното ускорение. На Луната периодът му е съответно

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}},$$

където g_1 е ускорението на свободно падане близо до повърхността на Луната. След като разделим почленно двете равенства, получаваме

$$T_1 = T\sqrt{\frac{g}{g_1}} = 1{,}5\ \text{s}\ .\ \sqrt{6} \approx 3{,}7\ \text{s}.$$

б) На Земята махало с период T = 1,5 s има дължина

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 0{,}56\ \text{m}.$$

За да може махало, разположено на Луната, да има същия период, е необходимо дължината му l_1 да бъде подбрана така, че

$$\frac{l_1}{g_1} = \frac{l}{g}.$$

Оттук намираме

$$l_1 = l\frac{g_1}{g} = \frac{l}{6} \approx 0{,}093\ \text{m}.$$

2.9. Математично махало с дължина l = 1 m се люлее успоредно на вертикална стена. На разстояние $l/2$ под точката O на окачване е забит пирон P така, че нишката на махалото се опира в него, когато достига вертикално положение (фиг. 2.8). Намерете периода на трептене на махалото.

Дадено: l = 1,0 m, g = 9,8 m/s^2
Да се намери: T
Решение

Нека приемем, че махалото е отклонено вляво от равновесното си положение, така че нишката да не се допира в пирона. Тогава махалото ще достигне вертикално положение след една четвърт от периода, с който би трептяло, ако нямаше пирон

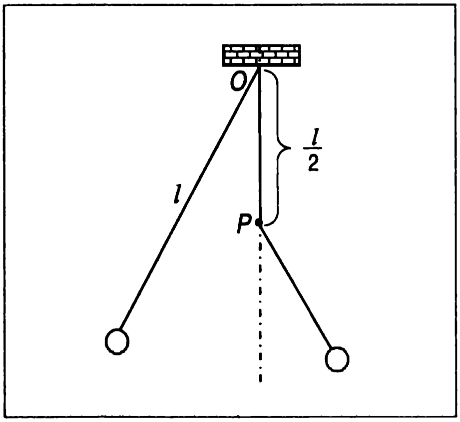
$$t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 0{,}5\text{s}.$$

След като достигне вертикално положение, нишката се опира в пирона и продължава да се люлее само долната половина на махалото. Следователно махалото ще достигне другото си крайно положение за време t_2, равно на една четвърт от периода, с който махалото би трептяло около т. P

$$t_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{2g}} \approx 0{,}35\text{s}.$$

Един период на махалото се състои в движение от крайно ляво положение до крайно дясно положение и обратно. Следователно периодът на трептене на махалото е

$$T = 2t_1 + 2t_2 = 1{,}7\ \text{s}.$$



Фиг. 2.8

2.10. Часовник с махало е настроен да работи точно на Екватора, където земното ускорение е g_1 = 9,79 m/s^2. С колко ще избързва часовникът за едно денонощие, ако го пренесем на някой от полюсите, където земното ускорение е g_2 = 9,81 m/s^2?

Дадено: g_1 = 9,79 m/s^2, g_2 = 9,81 m/s^2, t = 24 h

Да се намери: Δt

Решение

Механичните часовници са конструирани така, че при всяко трептене на махалото часовникът отчита една секунда. Щом часовникът работи точно на Екватора, това означава, че периодът на махалото на Екватора е T_1 = 1,0000 s и за едно денонощие то извършва точно 86 400 трептения. Обърнете внимание на големия брой значещи цифри, с които е записан периодът. Те съответстват на петте значещи цифри, с които е зададен броят секунди в едно денонощие. Оттук изразяваме дължината на махалото

$$l = \frac{gT_1^2}{4\pi^2}.$$

Периодът на махалото на някой от полюсите съответно е

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_2}} = T_1\sqrt{\frac{g_1}{g_2}}$$

или $T_2 \approx 0{,}999$ s.

За едно денонощие (t = 24 h = 86 400 s) махалото ще извърши на полюса $N = \frac{t}{T_2} = \frac{86\ 000 \text{ s}}{0{,}999 \text{ s}} = 86\ 486$ трептения или с 86 трептения повече, отколкото на Екватора. Това означава, че на полюса часовникът ще отчете 86 секунди повече за едно денонощие, т.е. часовникът избързва с Δt = 86 s/денонощие.

2.11. Математично махало с дължина 1 m е отклонено на ъгъл 30° спрямо вертикалата. Колко е скоростта на окаченото тяло, когато нишката достигне вертикално положение?

Дадено: l = 1 m, α = 30°, g = 9,8 m/s^2

Да се намери: v

Решение

I начин

От фиг. 2.9 се вижда, че височината на издигане на махалото е: $h = l - |OA_2|$, където т. A_2 е проекцията на точката на максимално отклонение A_1 върху верткалата OA. Тъй като ΔOA_1A_2 е правоъгълен с хипотенуза OA_1, следва, че:

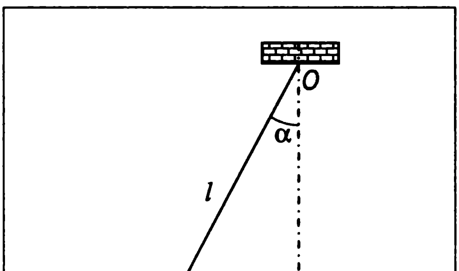
$$|OA_2| = |OA_1|\cos\alpha = l\cos\alpha.$$

Следователно височината на издигане е $h = l(1-\cos\alpha)$, а потенциалната енергия на тялото

$$E_п = mgh = mgl(1-\cos\alpha).$$

В момента на преминаване през равновесно положение първоначалната потенциална енергия се превръща напълно в кинетична енергия

$$mgl(1-\cos\alpha) = \frac{mv^2}{2}.$$



Фиг. 2.9

Окончателно определяме

$$v = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} \approx 1{,}62 \text{ m/s}.$$

При пресмятането на числения резултат използвахме факта, че $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$.

II начин

Амплитудата A на трептене на махалото е равна на дължината на дъгата AA_1, която тялото описва при неговото отклонение от равновесно положение. Тъй като ъгълът AOA_1 е централен в окръжност с център т. O и с радиус l, то следва, че

$$\frac{A}{2\pi l} = \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{1}{12} \text{ или } A = \frac{\pi l}{6}.$$

Ако приемем, че махалото извършва хармонично трептене, то скоростта на преминаване през равновесното (вертикално) положение, съгласно с връзката, установена в пример 2.6., е

$$v = 2\pi\nu A = \frac{2\pi}{T}A = \sqrt{\frac{g}{l}}A = \frac{\pi}{6}\sqrt{gl} \approx 1{,}64 \text{m/s}.$$

Коментар. Първият метод на решение е точен, тъй като се основава на фундаментален физичен закон – закона за запазване на енергията. Резултатът, получен по втория метод, се различава от него във втория знак след десетичната запетая. В много случаи тази разлика е несъществена. Тя обаче показва, че трептенето на математичното махало е хармонично само с известно приближение. При увеличаване на ъгъла на отклонение приближението става все по-грубо, а разликата – все по-голяма. За да се убедите в това, решете задачата по двата метода при начални ъгли на отклонение съответно $\alpha = 60^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$.

2.12. Математично махало с дължина 1 m и маса на окаченото топче 0,1 g е поставено в еднородно електрично поле с интензитет 1000 V/m, насочено вертикално нагоре. На топчето е придаден положителен електричен заряд $5{,}0.10^{-7}$ C. Намерете периода на махалото при малко отклонение от равновесното му положение.

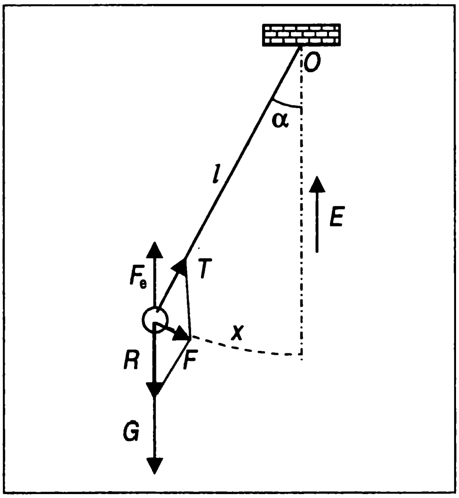
Дадено: $l = 1{,}0$ m, $m = 0{,}1$ g, $q = 5{,}0.10^{-7}$ C, $g = 9{,}8$ m/s^2

Да се намери: T

Решение

Върху теглилката действат три сили: силата на тежестта $G = mg$, електричната сила $F_e = qE$, насочена вертикално нагоре, и силата на опъване на нишката T, насочена по дължината на нишката (фиг. 2.10). За да намерим равнодействащата F на тези сили, първо ще определим равнодействащата R на силата на тежестта и електричната сила и след това – равнодействащата на R и силата на опъване. Непосредствено се проверява, че $G > F_e$, т.е. R е насочена надолу и нейната големина е

$$R = mg - qE.$$



Фиг. 2.10

Тъй като R и T не лежат на една права, F се определя по правилото на успоредника. Понеже нишката е неразтеглива, F е насочена перпендикулярно спрямо нея. От фиг. 2.10 се вижда, че

$$F = R\sin\theta = (mg - qE)\sin\theta,$$

където θ е ъгълът на отклонение на нишката. При малки ъгли можем да използваме приблизителната формула

$$\sin\theta \approx \frac{x}{l},$$

където x е дължината на дъгата, която топчето описва при своето отклонение от положение на равновесие. Така за равнодействащата получаваме

$$F \approx \frac{mg - qE}{l}x.$$

От тази формула намираме коефициента на пропорционалност между връщащата сила и отклонението

$$k = \frac{mg - qE}{l},$$

и съответно определяме периода на трептене

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg - qE}} \approx 2{,}9 \text{ s}.$$

Коментар. Тъй като силата на тежестта е по-голяма от електричната сила, в положение на устойчиво равновесие топчето се намира под точката на окачване. Интерес обаче представлява и случаят, когато $mg < qE$. Тогава равнодействащата R на двете сили е насочена вертикално нагоре и положението на устойчиво равновесие е разположено над точката на окачване, т.е. махалото е „изправено" нагоре. Намерете самостоятелно периода на махалото в този случай, ако $q = 1{,}5.10^{-6}$ C.

Задачи

2.13. Масата на тяло, окачено в пружинно махало, е 1 kg? Каква допълнителна маса трябва да се окачи на пружината, така че периодът на махалото да се увеличи 2 пъти?

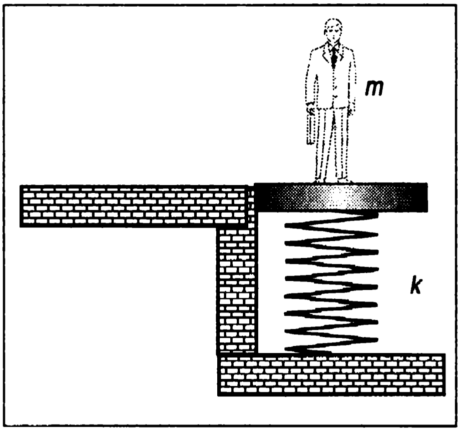
2.14. Колко е максималната връщаща сила, която действа на тяло с маса m = 0,5 kg, което трепти хармонично с честота ν = 10 Hz и амплитуда A = 1 cm?

2.15. Вертикална пружина е разтегната с 10 cm под действие на окачено към нея топче, което се намира в състояние на покой. С какъв период ще трепти топчето, ако го отклоним от равновесното му положение?

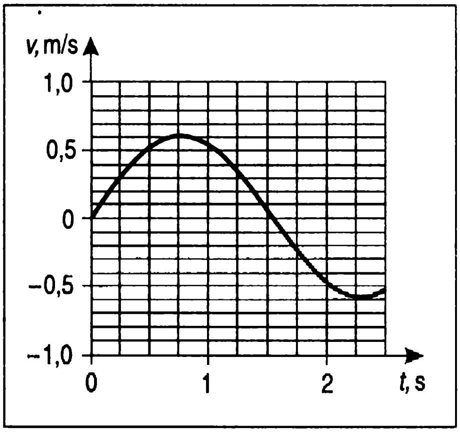
2.16. Човек с маса 80 kg стъпва върху лека платформа, закрепена на вертикална пружина (фиг. 2.11). Платформата започва да трепти във вертикално направление с амплитуда 20 cm.

а) На колко е равен коефициентът на еластичност на пружината?

б) Какъв е периодът на трептене на платформата?



Фиг. 2.11



Фиг. 2.12

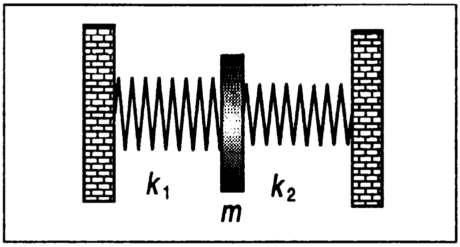
2.17. На фиг. 2.12 е показана част от синусоида, изобразяваща закона за скоростта на тяло, което трепти хармонично. Като използвате графиката, намерете:

а) максималната скорост на тялото;

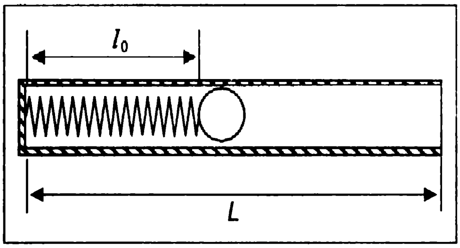
б) периода и честотата на трептенето;

в) амплитудата на трептенето.

2.18. Получете израз за честотата на трептене на тяло с маса m, прикрепено към две пружини с коефициенти на еластичност съответно k_1 и k_2 по начина, показан на фиг. 2.13.



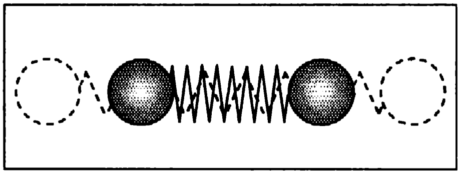
Фиг. 2.13



Фиг. 2.14

**** 2.19.** В цевта на пистолет-играчка е поставена пружина с коефициент на еластичност $k = 100$ N/m (фиг. 2.14), която изстрелва малка сачма с маса $m = 10$ g. Дължината на цевта е $L = 10$ cm. Дължината на пружината в недеформирано състояние е $l_0 = 5$ cm, а когато е свита – $l = 2{,}5$ cm. В случай че пистолетът стреля в хоризонтално направление, намерете: а) скоростта, с която сачмата излита от цевта; б) времето от натискане на спусъка до излитане на сачмата от цевта; в) с каква скорост излита сачмата от цевта, ако пистолетът стреля вертикално нагоре.

**** 2.20.** Към двата края на пружина с коефициент на еластичност k са закрепени топчета с еднакви маси m (фиг. 2.15). Топчетата са отклонени в противоположни посоки на еднакви разстояния от равновесните им положения, и са оставени да трептят свободно. Намерете периода на трептене на системата.

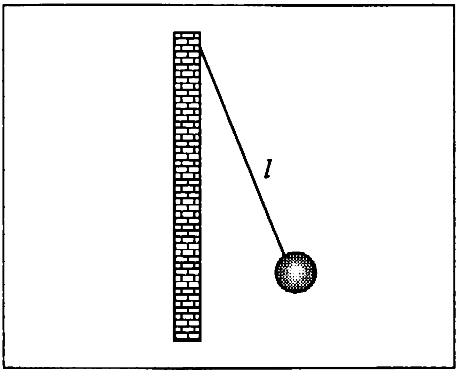


Фиг. 2.15

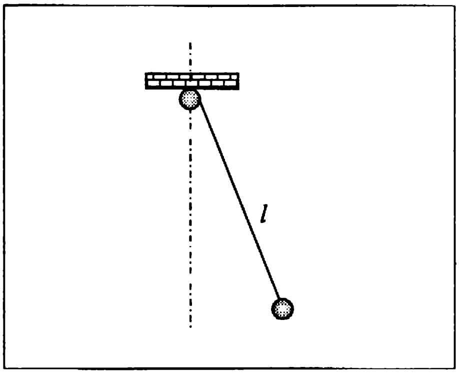
2.21. Торбичка с пясък е завързана за лека неразтеглива нишка. Торбичката е отклонена от равновесното ѝ положение и е оставена да се люлее свободно. Пясъкът се изсипва бавно от малка дупка в торбичката. Как се променя при това периодът на люлеене на торбичката?

2.22. Каква трябва да бъде дължината на математично махало, така че то да се люлее с период: а) 1 s; б) 10 s?

2.23. Математично махало с дължина l = 1 m е окачено на вертикална стена и е отклонено на малък ъгъл спрямо стената, както е показано на фиг. 2.16. Достигайки стената, топчето отскача от нея с два пъти по-малка скорост от скоростта, която е имало преди удара. Колко е интервалът от време между първия удар и десетия удар на топчето в стената?



Фиг. 2.16



Фиг. 2.17

2.24. Тежинката на математично махало с дължина l = 2 m е отклонена на 1 cm спрямо равновесното ѝ положение. В точката на окачване на махалото е закрепено топче с малки размери (фиг. 2.17). В даден момент махалото се освобождава и започва да се люлее. Едновременно с това топчето се пуска да пада свободно с нулева начална скорост. Кое от двете тела се намира по-високо в момента, когато махалото преминава през вертикално положение? На какво разстояние се намират топчето и тежинката на махалото в този момент?

⋆ **2.25.** Математично махало е отклонено на ъгъл θ = 15° спрямо вертикалата и е оставено да се люлее с нулева начална скорост. Тежинката преминава през равновесното си положение със скорост v = 2,0 m/s. Намерете периода на люлеене на махалото. *Упътване:* използвайте методите, описани в пример 2.11.

⋆⋆ **2.26.** Алуминиево топче, окачено на нишка с дължина l = 25 cm, е потопено изцяло във вода. Намерете периода на люлеене на топчето. Плътността на алуминия е ρ = 2,7 g/cm^3, а на водата – ρ_0 = 1,0 g/cm^3. Съпротивлението на водата се пренебрегва. *Упътване:* разгледайте решението на пример 2.12.

Трептящи системи

В много от следващите примери се търси честотата (или периодът) на трептене на системи, в които връщащата сила е резултат от действието не само на еластични сили, но и на сили от друг произход: електрични, хидростатични и т.н. В хода на решението на подобни задачи е желателно да се придържаме към следния алгоритъм.

1. Намираме равновесното положение на тялото, т.е. точката, в която силите се уравновесяват.

2. Разглеждаме малко отместване x на тялото от равновесното му положение, за да се убедим, че равнодействащата сила F е насочена към равновесното положение и е пропорционална на големината на отместването.

3. Пресмятаме периода T и честотата ν на трептенето по формулите

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

където k е коефициентът на пропорционалност между равнодействащата сила и отместването.

ПРИМЕРИ

2.27. Определете честотата ν на свободните вертикални трептения на шамандура, плаваща във вода. Шамандурата има цилиндрична форма и площ на напречното сечение S = 0,5 m^2. Масата на шамандурата е m = 10 kg, плътността на водата – ρ = 1000 kg/m^3, а земното ускорение – g = 9,8 m/s^2.

Дадено: S = 0,5 m^2, m = 10 kg, ρ = 1000 kg/m^3, g = 9,8 m/s^2

Да се намери: ν

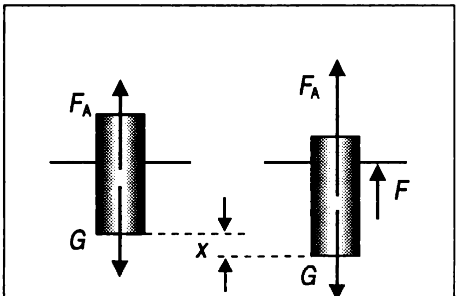
Решение

Когато шамандурата се намира в равновесие, Архимедовата сила F_A се уравновесява със силата на тежестта $G = mg$ (фиг. 2.18)

$$F_A = \rho g V = mg.$$

С V е означена тази част от обема на шамандурата, която е потопена под водата. Да предположим, че в резултат на външно въздействие шамандурата е изведена от равновесие и се потапя надолу на разстояние x. Обемът на частта от шамандурата, която е потопена под водата, нараства и е равен на $V' = V + Sx$. Архимедовата сила съответно се увеличава и става равна на $F_A' = \rho g V' = F_A + \rho g S x$. От фиг. 2.18 се вижда, че равнодействащата на Архимедовата сила и на силата на тежестта е насочена нагоре и големината ѝ е

$$F = F_A' - mg = \rho g S x.$$



Фиг. 2.18

Следователно върху шамандурата действа връщаща сила, която е пропорционална на отместването от равновесно положение, и коефициентът на пропорционалност е $k = \rho g S$. От формула за честотата на хармонично трептене получаваме

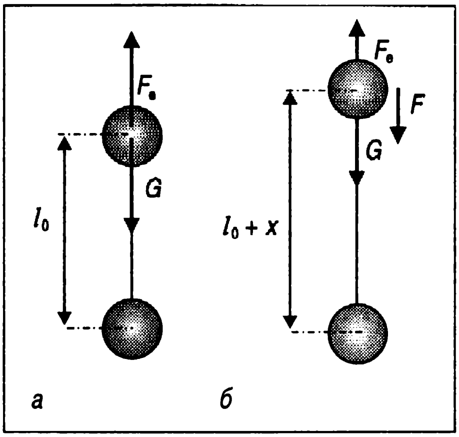
$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho g S}{m}} \approx 3{,}5 \text{ Hz}.$$

2.28. На тънка вертикална спица от изолиращ материал са нанизани две метални топчета. Долното топче е закрепено неподвижно към спицата, а горното може да се хлъзга по нея без триене. На топчетата придават еднакви по знак електрични заряди. При това, в състояние на равновесие, горното топче се намира на разстояние $l_0 = 5$ cm над долното топче. Намерете честотата ν, с която ще трепти горното топче, ако бъде отклонено на малко (в сравнение с l_0) разстояние от равновесното му положение.

Дадено: $l_0 = 5$ cm, $g = 9{,}8$ m/s^2

Да се намери: ν

Решение



Фиг. 2.19

В състояние на равновесие силата на тежестта G, която действа на горното топче, се уравновесява със силата F_e на електростатично отблъскване, с която му действа долното топче (фиг. 2.19, *а*)

$$\frac{kq_1q_2}{l_0^2} = mg,$$

където q_1 и q_2 са съответно зарядите на горното и на долното топче, а m е масата на горното топче. Нека отклоним горното топче от неговото равновесно положение, като например го издигнем на малко разстояния x нагоре по спицата (фиг. 2.19, *б*). Тогава електростатичната сила намалява и равнодействащата F на силите G и F_e е насочена надолу – към равновесното положение на топчето. Големината на равнодействащата съответно е

$$F = mg - \frac{kq_1q_2}{(l_0 + x)^2}.$$

От условието за равновесие изразяваме

$$kq_1q_2 = mgl_0^2,$$

откъдето за F получаваме

$$F = mg\left(1 - \frac{l_0^2}{(l_0 + x)^2}\right) = \frac{mg(2l_0 + x)x}{(l_0 + x)^2}.$$

Като вземем предвид, че отместването x е много по-малко от равновесното разстояние l_0, можем да пренебрегнем x в сравнение с l_0 в изразите в скобите. Тогава получаваме, че връщащата сила F е правопропорционална на отместването

$$F \approx \frac{2mg}{l_0}x,$$

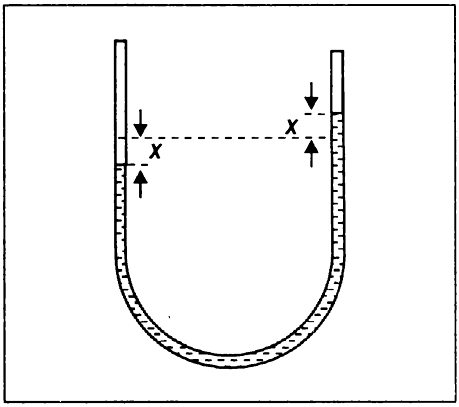
т.е. изпълнен е законът на Хук. Като използваме формулата за честота на хармонично трептене, намираме:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{l_0}} \approx 3{,}2\text{Hz}.$$

2.29. В U-видна тръба с площ на напречното сечение S се намира течност с обем V. В състояние на равновесие нивата на течността в двете колена на тръбата са еднакви. С какъв период ще трепти течността в тръбата, ако в резултат на външно въздействие (например разклащане на тръбата) нивото на течността в едното коляно се повиши, а в другото коляно се понижи.

Дадено: S, V, g
Да се намери: T
Решение

Ако нивото на течността в лявото коляно се понижи x, в дясното коляно преминава течност с обем $\Delta V = Sx$. Оттук следва, че в същото време нивото на течността в дясното коляно се повишава с x (фиг. 2.20) и разликата на нивата между двете колена е $h = 2x$. Стълбът течност в дясното коляно, разположен над нивото на течността в лявото коляно, създава допълнително, некомпенсирано налягане $p = \rho g(2x)$ и сила на натиск върху останалия обем на течността



Фиг. 2.20

$$F = pS = 2\rho gSx.$$

Както се вижда, за тази сила е изпълнен законът на Хук и коефициентът на пропорционалност е

$$k = 2\rho gS.$$

Тъй като в трептенето участва целият обем на течността, който има маса $m = \rho V$, периодът на трептенето съответно е

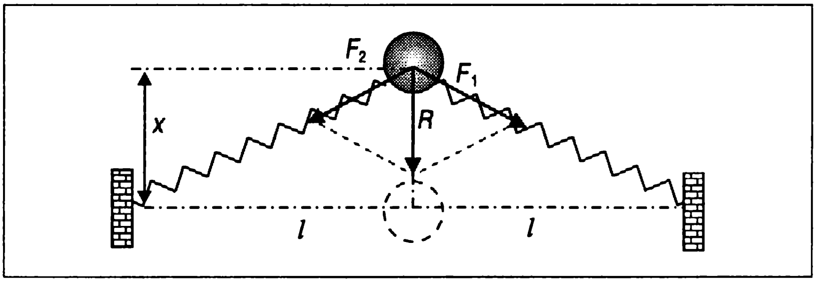
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{\frac{2V}{gS}}.$$

2.30. Топче с маса m е закрепено между две еднакви пружини, опънати със сила F. Дължината на всяка от пружините в опънато състояние е l. Получете израз за честотата на трептене на топчето в направление, перпендикулярно на равновесното положение на пружините. Приемете, че отклонението на топчето от равновесното му положение е много по-малко от големината на деформацията на пружините.

Дадено: m, F, l
Да се намери: ν
Решение

Нека означим с l_0 дължината на всяка от пружините в недеформирано състояние ($l > l_0$). От закона на Хук следва, че: $F = k(l - l_0)$. Ако отклоним топчето на разстояние x от равновесното му положение, пружините се разтягат допълнително и дължините им стават (фиг. 2.21):

$$l' = \sqrt{l^2 + x^2}.$$



Фиг. 2.21

В това положение пружините действат върху топчето с еднакви по големина сили

$$F_1 = F_2 = k\left(\sqrt{l^2 + x^2} - l_0\right),$$

където k е коефициентът на еластичност на всяка от пружините. Силите F_1 и F_2 са насочени успоредно на пружините, а тяхната равнодействаща R – в посока към равновесното положение на топчето. От фиг. 2.21 се вижда, че

$$R = 2F_1\sin\alpha = 2k\left(\sqrt{l^2 + x^2} - l_0\right)\sin\alpha.$$

От друга страна, имаме

$$\sin\alpha = \frac{x}{l} = \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}},$$

откъдето намираме окончателен израз за равнодействащата сила като функция на отместването

$$R = \frac{2k\left(\sqrt{l^2 + x^2} - l_0\right)}{\sqrt{l^2 + x^2}}x.$$

Нека сега отчетем факта, че отклонението на топчето е малко в сравнение с първоначалната деформация на пружините $|l - l_0|$. Това означава, че можем да пренебрегнем x в сравнение с l в израза под квадратния корен. Тогава получаваме приблизително

$$R \approx \frac{2k(l - l_0)}{l}x = \frac{2F}{l}x.$$

Следователно при малки отклонения от равновесното положение връщащата сила се подчинява на закона на Хук с коефициент на пропорционалност

$$k = \frac{2F}{l},$$

а топчето съответно извършва хармонично трептене с честота

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2F}{ml}}.$$

Коментар: Означава ли полученият резултат, че ако пружините не са разтегнати първоначално ($F = 0$), топчето няма да трепти ($\nu = 0$)? За да отговорим на този въпрос, ще изследваме израза за връщащата сила

$$R = \frac{2k\left(\sqrt{l^2+x^2}-l_0\right)}{\sqrt{l^2+x^2}}x = \frac{2k\left(l\sqrt{1+\frac{x^2}{l^2}}-l_0\right)}{l\sqrt{1+\frac{x^2}{l^2}}}x \approx \frac{2k\left(l-l_0+\frac{x^2}{2l}\right)}{l+\frac{x^2}{2l}}x.$$

Във второто равенство използвахме приблизителната формула на Бернули

$$\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1+\frac{\varepsilon}{2},$$

където $\varepsilon = \frac{x^2}{l^2}$ е число, много по-малко от единица. Ако пружината не е била разтегната първоначално, т.е. $l - l_0 = 0$, виждаме, че бихме могли да пренебрегнем x единствено в знаменателя. Тогава получаваме

$$R \approx \frac{2k\left(\frac{x^2}{2l}\right)}{l}x = \frac{kx^3}{l^2}.$$

Ясно е, че връщащата сила в този случай не се подчинява на закона на Хук и трептенето няма да бъде хармонично. Това означава например, че периодът на трептенето ще зависи от амплитудата (вж. пример 2.5).

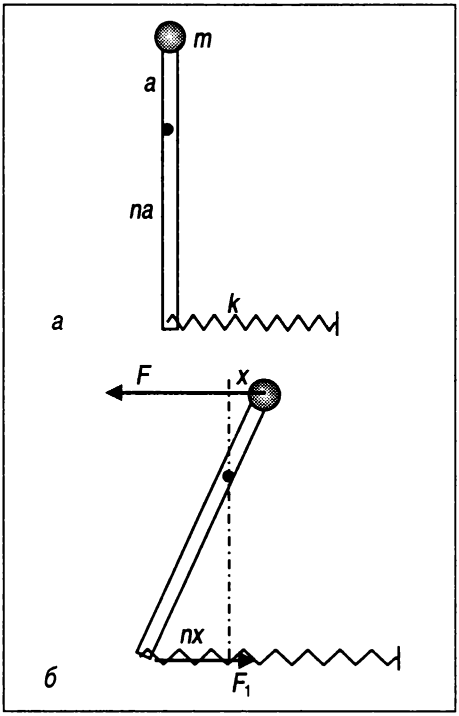
2.31. Двустранен лост с дължини на рамената съответно a и na ($n > 1$) може да се върти свободно около вертикална ос. В края на късото рамо е закрепено топче с маса m, а към края на дългото рамо – пружина с коефициент на еластичност k, разположена перпендикулярно спрямо лоста (фиг. 2.22, *а*). Намерете периода T на трептене на системата. Приемете, че масата на лоста е много по-малка от тази на топчето.

Дадено: a, n, k, m
Да се намери: T
Решение

Ще разгледаме две решения на задачата – едно, което се основава на закона за запазване на енергията, и второ, в което непосредствено се пресмята връщащата сила, приложена върху топчето.

I начин

Да предположим, че в началния момент топчето е отклонено на малко разстояние x спрямо равновесното му положение (фиг. 2.22, *б*). При това краят на дългото рамо също се отклонява,



Фиг. 2.22

като разтяга пружината с $\Delta l = nx$. Потенциалната енергия на деформираната пружина съответно е

$$E_п = \frac{k(nx)^2}{2}.$$

След като топчето бъде освободено, то започва да се ускорява, а кинетичната му енергия – да нараства. Кинетичната енергия, свързана с движението на лоста, може да бъде пренебрегната, понеже масата на лоста е много по-малка от масата на топчето. В момента, в който лостът преминава през равновесното си положение, първоначалната потенциална енергия на пружината е трансформирана изцяло в кинетична енергия на топчето

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{k(nx)^2}{2}$$

или

(1) $$v_{max} = nx\sqrt{\frac{k}{m}},$$

където v_{max} е максималната скорост на топчето. Както обаче знаем, максималната скорост на тяло, което трепти хармонично, е свързана с максималното отклонение чрез съотношението: $v_{max} = 2\pi\nu x$. Като сравним този израз с формула (1), намираме

$$\nu = \frac{n}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

или $$T = \frac{2\pi}{n}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

II начин

Отклоняваме топчето на разстояние x, при което пружината се разтяга с $\Delta l = nx$. От закона на Хук намираме, че върху края на дългото рамо действа сила на еластичност $F_1 = knx$. С каква сила F късото рамо ще действа върху топчето? Можем ли да приложим правилото за равновесие на лоста, което ви е познато от 7. клас? Понеже приемаме, че лостът е с малка маса и пренебрежима кинетична енергия, работата, която извършва силата на еластичност върху дългото рамо, изцяло се преобразува в механична работа на силата F, с която късото рамо действа върху топчето. Това означава, че е изпълнено „златното правило на механиката“

$$Fx = F_1(nx),$$

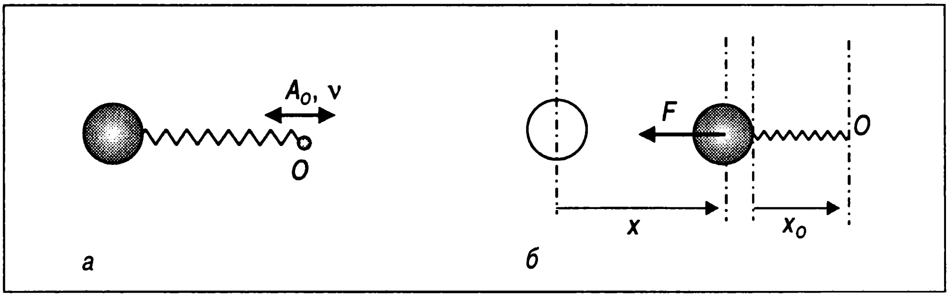
от което намираме

$$F = n^2kx.$$

Коефициентът на пропорционалност между връщащата сила и отместването следователно е $k' = n^2k$ и за честотата получаваме

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k'}{m}} = \frac{n}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

2.32. Собствената честота на хоризонтално пружинно махало е $\nu_0 = 10$ Hz. Под действие на периодична външна сила точката на окачване O на пружината започва да трепти хармонично с амплитуда $A_0 = 1$ cm и с честота $\nu = 8$ Hz (фиг. 2.23, *а*). Намерете амплитудата A на принуденото трептене на топчето. Силите на триене се пренебрегват.



Фиг. 2.23

Дадено: $\nu_0 = 10$ Hz, $\nu = 8$ Hz, $A_O = 1$ cm
Да се намери: A
Решение

Собствено се нарича трептенето на едно махало, когато неговата точка на окачване е неподвижна и върху тялото не действат други сили освен връщащата сила. Честотата на собственото трептене се определя по познатата ни формула: $\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$, където k е коефициентът на еластичност на пружината, а m – масата на тялото. Когато обаче точката на окачване трепти хармонично, тялото започва да трепти със същата честота като тази на външната сила – ν. От фиг. 2.23, *б* се вижда, че при отклонение x_O на точката на окачване и x – на тялото, пружината променя дължината си с $\Delta l = x_O - x$. От закона на Хук и II принцип на Нютон намираме

$$ma = k(x_O - x).$$

Ние обаче знаем, че при хармонично трептене ускорението на тялото е пропорционално на неговото отместване

$$a = -4\pi^2\nu^2 x,$$

като знакът „–" показва, че ускорението и отместването са в противоположни посоки. Като вземем предвид, че $k = 4\pi^2\nu_0^2 m$, след алгебрични преобразования намираме

$$x = \frac{x_O\nu_0^2}{\nu_0^2 - \nu^2}.$$

Тъй като амплитудата е максималното по модул отклонение, получаваме окончателния резултат

$$A = \frac{\nu_0^2}{\left|\nu_0^2 - \nu^2\right|}A_O \approx 2{,}8\,\text{cm}.$$

От получената формула следва, че амплитудата на махалото нараства значително, когато честотата на външната сила се приближава до собствената честота ν_0 – т.е. настъпва **резонанс**. Как обаче да намерим A, когато $\nu = \nu_0$? Тогава амплитудата, с която трепти тялото, става толкова голяма, че задължително трябва да бъдат отчетени силите на триене и съпротивление.

2.33. Хоризонтална поставка, върху която е посипан пясък, трепти хармонично във вертикално направление с честота 50 Hz. При каква минимална амплитудата на трептене песъчинките ще започнат да подскачат върху поставката?

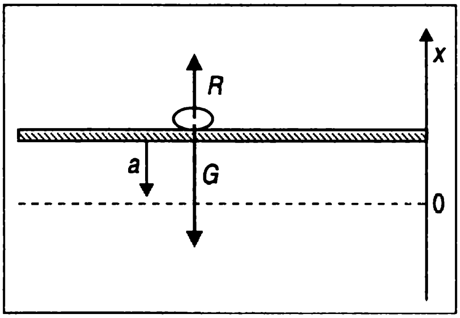
Дадено: $\nu = 50$ Hz, $g = 9{,}8$ m/s^2
Да се намери: A_{min}
Решение

Върху дадена песъчинка с маса m действат силата на тежестта $G = mg$ и силата R на реакция на опората (фиг. 2.24). От II принцип на Нютон следва, че

$$ma = R - mg$$

или

$$R = m(a + g).$$



Фиг. 2.24

При хармонично трептене ускорението, с което се движи поставката, зависи от нейното отместване x спрямо равновесното ѝ положение по закона

$$a = -(2\pi\nu)^2 x,$$

където ν е честотата на трептене. Силата на реакция на опората съответно е

$$R = m[g - (2\pi\nu)^2 x].$$

Тя е минимална, когато поставката е максимално отклонена нагоре, т.е. $x = A$

$$R_{min} = m[g - (2\pi\nu)^2 A].$$

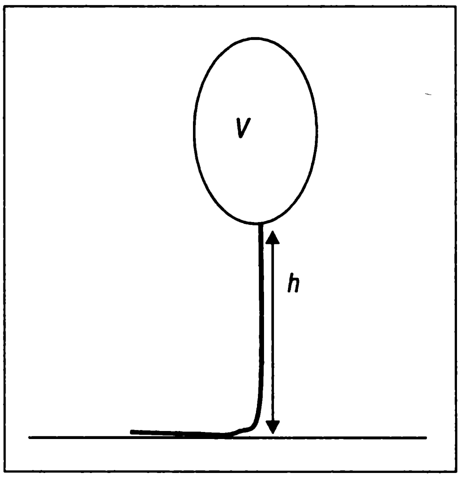
Песъчинките ще започнат да подскачат, т.е. да се отделят от повърхността, ако в даден момент силата на реакция стане равна на нула. Това е възможно при амплитуда, по-голяма от

$$A_{min} = \frac{g}{(2\pi\nu)^2} \approx 1{,}0.10^{-4}\ \text{m} \approx 0{,}1\ \text{mm}.$$

Задачи

2.34. Две еднакви метални топчета са свързани с пружина с дължина в недеформирано състояние $l_0 = 2$ cm. Едното топче е закрепено неподвижно, а другото трепти свободно с честота $\nu_0 = 2{,}0$ Hz. На топчетата се придават еднакви по знак заряди, в резултат на което дължината на пружината в състояние на равновесие става $l = 2{,}4$ cm. Каква е честотата ν, с която свободното топче трепти около новото си положение на равновесие?

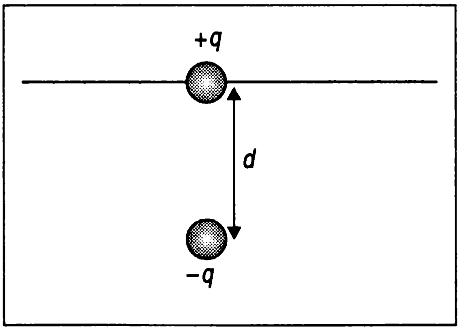
2.35. Балон с обем $V = 0{,}010$ m^3 е пълен с хелий. Балонът е завързан за тежка нишка с маса на единица дължина $\mu = 20$ g/m, чийто свободен край лежи върху земята (фиг. 2.25). Плътността на въздуха при нормални условия е $\rho_в = 1{,}3$ kg/m^3, а на хелия – $\rho_{He} = 0{,}1$ kg/m^3. Масата на обвивката на балона е $m_0 = 2$ g. Намерете: а) на каква



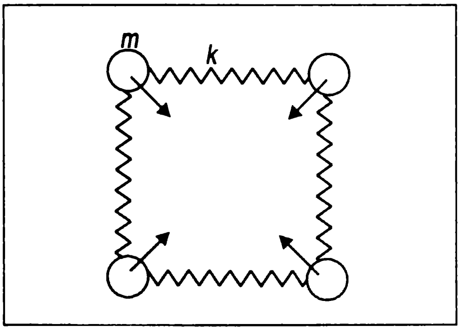
Фиг. 2.25

височина h_0 над земята балонът ще се намира в равновесие; б) с какъв период ще трепти балонът, ако бъде издигнат допълнително на малко разстояние над положението му на равновесие.

2.36. Топче със заряд q и маса m може да се хлъзга без триене по тънка хоризонтална спица от изолиращ материал. На разстояние d от спицата е закрепено неподвижно топче със заряд $-q$ (фиг. 2.26). Намерете честотата на трептене на първото топче при малко отклонение от неговото равновесно положение.



Фиг. 2.26



Фиг. 2.27

** **2.37.** Четири еднакви топчета, всяко с маса m, намиращи се във върховете на квадрат, са свързани с еднакви пружини с коефициенти на еластичност k (фиг. 2.27). На топчетата са придадени еднакви начални скорости в направление към центъра на квадрата. Намерете честотата, с която ще трептят топчетата.

2.38. Трупче е поставено върху хоризонтална платформа, която трепти хармонично в хоризонтално направление с честота $\nu = 10$ Hz. Максималната сила на триене f_{max} между трупчето и платформата е $f_{max} = 1/3\,P$; където P е теглото на трупчето. При каква минимална амплитудата A_{min} на трептене трупчето ще започне да се хлъзга върху поставката?

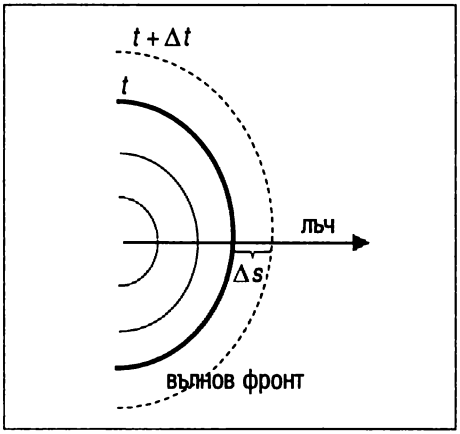
ВЪЛНИ

Механични вълни. Звук

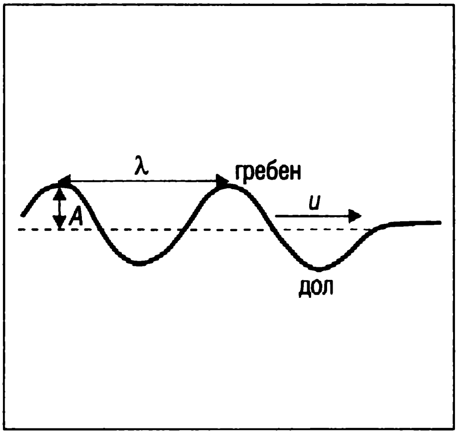
Механичната вълна е вид движение, при което трептенето на дадена частица от една среда – твърдо тяло, течност или газ, се предава последователно, от частица на частица, в целия обем, зает от средата. **Вълнов фронт** се нарича мислената повърхност, която в даден момент разделя частиците, до които вълната още не е стигнала, от частиците, през които вълната е преминала. **Скорост на вълната** u се нарича скоростта, с която се премества вълновият фронт

$$u = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

където Δs е разстоянието, което вълната изминава за време Δt в направление, перпендикулярно на фронта (фиг. 2.28). Мислените линии, които пресичат вълновия фронт под



Фиг. 2.28



Фиг. 2.29

прав ъгъл, се наричат **лъчи**. Лъчът, който преминава през дадена точка, задава посоката на разпространение на вълната. Според формата на вълновия фронт можем да говорим за **сферични вълни**, **кръгови вълни** (например вълните върху водната повърхност след хвърляне на предмет с малки размери), **плоски вълни** и т.н.

Вълната се нарича **надлъжна**, ако частиците трептят в направление, успоредно на посоката на разпространение на вълната. Надлъжните вълни се разпространяват в твърди тела, течности и газове. **Напречни** са вълните, в които частиците трептят в направление, перпендикулярно спрямо посоката на разпространение на вълната. Напречни вълни могат да се разпространяват само в твърдите тела.

Пример за напречни вълни са вълните, които се разпространяват по опънат шнур или струна (фиг. 2.29). Тяхната скорост се дава с формулата

$$u = \sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

където F е силата, с която е опъната струната, а μ е масата на единица дължина от струната (измерва се в единици kg/m).

Честота на вълната ν и **период на вълната** T се наричат съответно честотата и периодът, с която трептят частиците на средата. **Амплитуда на вълната** A е максималното отклонение на частиците от техните равновесни положения. Точките, които в даден момент имат крайни отклонения $+A$ и $-A$, се наричат съответно **гребени** и **долове** на вълната (вж. фиг. 2.29). **Дължина на вълната** λ е разстоянието между два съседни гребена или два съседни дола. Скоростта на разпространение, честотата и дължината на вълната са свързани със съотношението

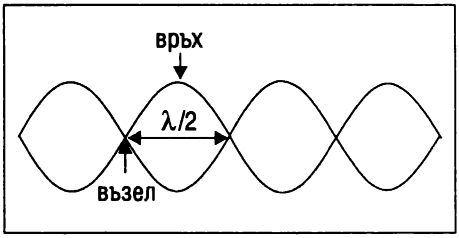
$$u = \lambda\nu.$$

Ако използваме връзката $\nu = \frac{1}{T}$, получаваме

$$\lambda = uT,$$

т.е. дължината на вълната е равна на разстоянието, което вълната изминава в продължение на един период.

При наслагване на две вълни с еднакви честоти се наблюдава **интерференция** – в определени точки на пространството, наречени **интерференчни минимуми**, вълните се гасят взаимно и там частиците трептят с минимална амплитуда. В други точки, наречени **интерференчни максимуми**, вълните се усилват и частиците трептят с максимална амплитуда. При интерференция на две вълни с еднакви амплитуди, които се разпространяват в противоположни посоки, се образува **стояща вълна**. В интерференчните минимуми частиците не трептят – тези точки се наричат **възли** на стоящата вълна. Точките, които трептят с максимална амплитуда, се наричат **върхове** на стоящата вълна. Разстоянието между два съседни възела или два съседни върха е равно на $\frac{\lambda}{2}$ (фиг. 2.30). Ако опъната струна е закрепена неподвижно в двата си края, тя може да извършва различни **собствени трептения**. Всяко собствено трептене отговаря на стояща вълна, чиято дължина се определя от условието



Фиг. 2.30

$$L = n\frac{\lambda}{2},$$

където L е разстоянието между краищата на струната, а $n = 1, 2, 3, \ldots$ е цяло число. Честотите на собствените трептения се дават с формулата

$$\nu_n = n\frac{u}{2L},$$

където u е скоростта на разпространение на вълните по струната. Трептенето с най-ниска честота съответства на $n = 1$ и се нарича **основно трептене**, а неговата честота $\nu_1 = \frac{u}{2L}$ – **основна честота**. Всички останали трептения имат честоти, които са кратни на основната. Те се наричат **хармонични честоти** на струната (например втора хармонична, трета хармонична и т.н.). В музиката тези честоти са известни като **обертонове**.

Звуковите вълни са механични вълни с честоти в диапазона на слуховото възприятие на човека: 16–20 000 Hz. Механични вълни с честота, по-голяма от 20 000 Hz, се наричат **ултразвук**, а с честота, по-ниска от 16 Hz – **инфразвук**. **Ефектът на Доплер** се състои в промяната на честотата на звука, която регистрира приемник, когато източникът се движи спрямо него. Честотата се увеличава, когато източникът и приемникът се движат един срещу друг, и намалява, когато се отдалечават един от друг. Ще разгледаме два частни случая:

а) **Движещ се източник и неподвижен приемник.** Ако ν_0 е честотата, с която трепти източникът, а v – скоростта му на движение, приемникът регистрира честота

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 \mp \frac{v}{u}},$$

където знакът „–" съответства на случая, когато източникът се движи в посока към приемника, а знакът „+" – на отдалечаване от него.

б) **Неподвижен източник и движещ се приемник.** Честотата, която регистрира приемникът, се дава с израза

$$\nu = \nu_0\left(1 \pm \frac{v}{u}\right).$$

В този случай знаците „+" и „–" отговарят съответно на взаимно приближаване и отдалечаване на приемника и източника.

Ударна вълна възниква, когато скоростта v на движение на източника е по-голяма от скоростта u на вълната в дадената среда. Фронтът на ударната вълна има формата на конус (конус на Мах), чийто връх се премества заедно с източника. Ъгълът θ при върха на конуса, т.нар. ъгъл на Мах, се определя от формулата

$$\sin\theta = \frac{u}{v}.$$

В следващите примери и задачи ще приемем, че скоростта на звука във въздух е 340 m/s.

ПРИМЕРИ

2.39. Турист се намира на 500 m от вертикална скала. Колко време след като извика, туристът ще чуе ехото?

Дадено: $s = 500$ m, $u = 340$ m/s

Да се намери: t

Решение

Звуковата вълна изминава разстоянието от туриста до скалата за време $t_1 = \frac{s}{u}$, където $s = 500$ m е разстоянието до скалата, а u е скоростта на звука във въздуха. След като се отрази от скалата, звуковата вълна (ехото) изминава същото разстояние за същото време t_1, но в обратна посока. Следователно туристът чува ехото след време

$$t = 2t_1 = \frac{2s}{u} \approx 2{,}9 \text{ s}.$$

2.40. Сеизмична станция регистрира два последователни труса през интервал от време $\Delta t = 2$ min 30 s. На какво разстояние от станцията се намира огнището на земетресението, ако е известно, че скоростта на надлъжните сеизмични вълни е $u_1 = 20$ km/s, а скоростта на напречните сеизмични вълни – $u_2 = 5$ km/s?

Дадено: $\Delta t = 150$ s, $u_1 = 20$ km/s, $u_1 = 5$ km/s

Да се намери: s

Решение

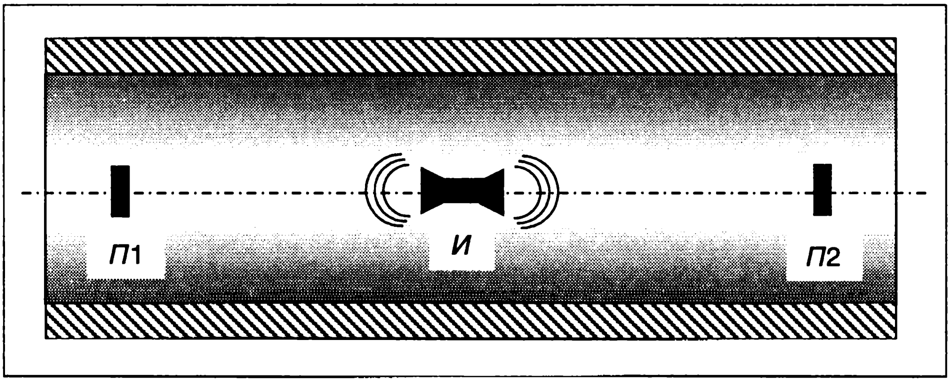
Първият трус се дължи на надлъжната вълна, която достига станцията, а вторият – на напречната. Надлъжната вълна изминава растоянието s от огнището до станцията за време: $t_1 = \frac{s}{u_1}$, а напречната – за време $t_2 = \frac{s}{u_2}$. Следователно интервалът от време между двата труса е

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{s(u_1 - u_2)}{u_1 u_2}.$$

Оттук намираме търсеното разстояние

$$s = \frac{u_1 u_2 \Delta t}{u_1 - u_2} \approx 1000 \text{ km}.$$

2.41. За да се измери скоростта на водата в тръба, се използва апаратурата, показана на фиг. 2.31. По оста на тръбата са разположени излъчвател *И* на кратки звукови импулси и два приемника на звук *П*1 и *П*2, които се намират на еднакви разстояния от излъчвателя. Приемникът *П*1 регистрира звуковия импулс за време t_1 = 1,01.10^{-4} s след неговото излъчване, а приемникът *П*2 – за време t_2 = 0,99.10^{-4} s. Определете в каква посока и с каква скорост се движи водата в тръбата, ако е известно, че скоростта на звука във водата е u = 1400 m/s.



Фиг. 2.31

Дадено: t_1 = 1,01.10^{-4} s, t_2 = 0,99.10^{-4} s, u = 1400 m/s

Да се намери: v

Решение

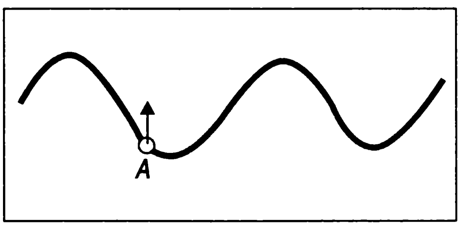
Когато звуковият импулс се движи срещу посоката на течението, неговата скорост спрямо стените на тръбата е $u_1 = u - v$, където v е скоростта на течението, а u е скоростта на звука в спокойна вода. Аналогично при разпространение в посоката на течението скоростта на звуковия импулс е $u_2 = u + v$. Тъй като импулсът стига до приемника *П*2 по-рано, отколкото до приемника *П*1, следва, че течението е насочено от *П*1 към *П*2. Импулсът достига приемника *П*1 за време $t_1 = \frac{l}{u-v}$, а приемника *П*2 – за време $t_2 = \frac{l}{u+v}$. Ако разделим почленно двата израза, получаваме: $\frac{t_1}{t_2} = \frac{u+v}{u-v}$, откъдето намираме

$$v = u\frac{t_1-t_2}{t_1+t_2} = 1400\ \text{m/s}\ .\frac{1{,}01.10^{-4}\ \text{s} - 0{,}99.10^{-4}\ \text{s}}{1{,}01.10^{-4}\ \text{s} + 0{,}99.10^{-4}\ \text{s}} = 14\ \text{m/s}.$$

2.42. В каква посока се разпространява вълната, изобразена на фиг. 2.32, ако в дадения момент водните частици в т. *A* се издигат нагоре?

Решение

Щом т. *A* се издига нагоре, към нея се приближава най-близко разположеният гребен на вълната. Следователно вълната се разпространява надясно.



Фиг. 2.32

2.43. Звукова вълна преминава от въздух във вода. Дължината на вълната във въздуха е 0,10 m. Колко е дължината на вълната във водата? Скоростта на звука във водата е 1400 m/s.

Дадено: $\lambda_1 = 0{,}10$ m, $u_1 = 340$ m/s, $u_2 = 1400$ m/s
Да се намери: λ_2
Решение

Честотата на звука във въздуха е

$$\nu = \frac{u_1}{\lambda_1},$$

където u_1 е скоростта на звука във въздуха, а λ_1 – дължината на вълната във въздуха. След като звукът навлезе във водата, неговата честота не се променя, а скоростта му става u_2. Следователно дължината на вълната във водата е

$$\lambda_2 = \frac{u_2}{\nu} = \lambda_1 \frac{u_2}{u_1} = 0{,}41 \text{ m}.$$

Коментар. Откъде следва, че честотата на звука не се променя при преминаване от една среда в друга? Известно е, че вълната се разпространява, като трептенето на дадена частица предизвиква трептене на разположените до нея съседни частици. Следователно можем да приемем, че при преминаване на звуковата вълна от въздух във вода водните частици, разположени до свободната повърхност на течността, извършват принудено трептене, предизвикано от трептящите частици на въздуха. Както знаете, честотата на принуденото трептене е равна на честотата на променливата сила, която го предизвиква, т.е. честотата на звука е еднаква и в двете среди.

2.44. С каква скорост се разпространяват напречните вълни по стоманена струна, която е опъната със сила 100 N? Площта на напречното сечение на струната е 1,0 mm^2, а плътността на стоманата – 7800 kg/m^3.

Дадено: $F = 100$ N, $S = 1{,}0$ mm^2, $\rho = 7800$ kg/m^3
Да се намери: u
Решение

Тъй като силата на опъване на струната е дадена по условие, е необходимо да намерим масата μ на единица дължина от струната. За целта ще разгледаме мислено участък от струната с дължина l. Обемът на този участък е $V = Sl$, където S е площта на напречното сечение на струната. Масата на участъка е съответно $m = \rho V = \rho S l$. Оттук намираме масата на единица дължина

$$\mu = \frac{m}{l} = \rho S.$$

Като използваме получения резултат и формулата за скоростта на напречните вълни по опъната струна, намираме

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} = \sqrt{\frac{100 \text{ N}}{7800 \text{ kg/m}^3 . 1{,}0.10^{-6} \text{ m}^2}} \approx 113 \text{ m/s}.$$

2.45. Скоростта на вълните по опънато въже е 25 m/s. Единият край на въжето е разклатен с честота 50 Hz, а другият край е закрепен неподвижно. На какво най-малко разстояние от неподвижния край се намира: а) следващата неподвижна точка от въжето; б) точка, която трепти с максимална амплитуда?

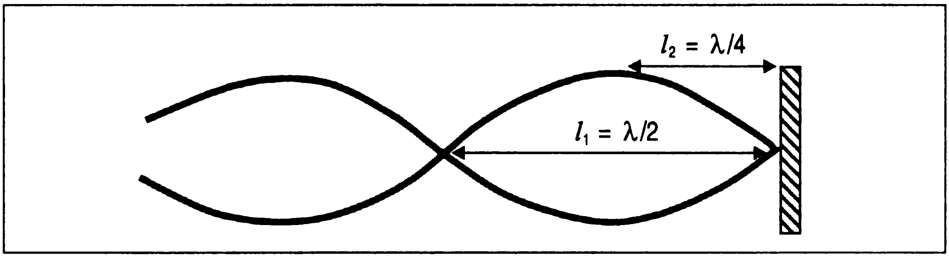
Дадено: $u = 25$ m/s, $\nu = 50$ Hz
Да се намери: l_1, l_2
Решение

а) Върху въжето се наслагват две хармонични вълни, които се разпространяват в противоположни посоки: едната породена от източника на вълната, а другата – отразена от неподвижния край на въжето. Техните дължини са еднакви

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{25\ \text{m/s}}{50\ \text{Hz}} = 0{,}5\ \text{m}.$$

При това върху въжето се образува стояща вълна. Възлите на стоящата вълна са разположени на еднакви разстояния $\lambda/2$ един от друг (фиг. 2.33). Понеже неподвижният край на въжето сам по себе си е възел на стоящата вълна, то най-близката неподвижна точка се намира от него на разстояние

$$l_1 = \lambda/2 = 0{,}25\ \text{m}.$$



Фиг. 2.33

б) Върхът на стоящата вълна, т.е. точката, която трепти с максимална амплитуда, е разположен по средата между двата възела, т.е. на разстояние $\lambda/4$ от неподвижния край (вж. фиг. 2.33). Следователно

$$l_2 = \lambda/4 = 0{,}125\ \text{m}.$$

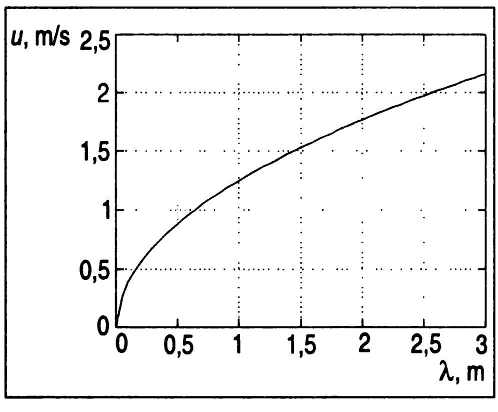
2.46. На фиг. 2.34 е дадена графика на зависимостта на скоростта u на вълната върху водна повърхност от нейната дължина λ. Върху повърхността на езеро плава шамандура, която се люлее във вертикално направление с период 1,0 s. Намерете приблизително дължината на вълната, породена от люлеенето на шамандурата.

Дадено: $T = 1{,}0$ s
Да се намери: λ
Решение

При зададената стойност на T търсената дължината на вълната λ и съответстващата ѝ скорост u удовлетворяват условието

$$u = \frac{\lambda}{T} = 1{,}0.\lambda.$$

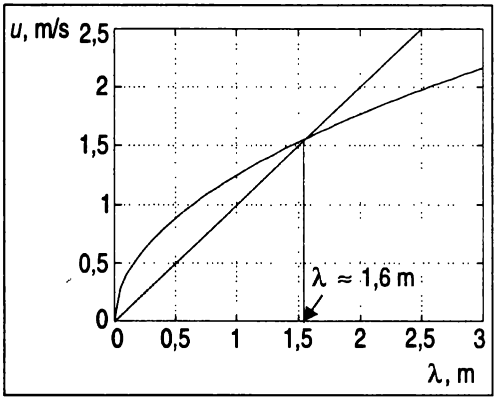
Това е уравнение, което определя права линия в координатната система с оси λ и u,



Фиг. 2.34

както е показано на 2.35. Стойността на λ се определя от координатата на пресечната точка на тази права с графиката, изобразяваща зависимостта на u от λ. Чрез геометрично построение намираме

$$\lambda \approx 1{,}6\ \mathrm{m}.$$



Фиг. 2.35

2.47. Музикалният тон „ла“ съответства на честота 440 Hz. Какъв трябва да бъде диаметърът на стоманена струна с дължина 0,5 m, опъната със сила 100 N, така че при разтрептяване да издава тона „ла“? Плътността на стоманата е 7800 kg/m³.

Дадено: $\nu_{ла} = 440\ \mathrm{Hz}$, $L = 0{,}5\ \mathrm{m}$, $F = 100\ \mathrm{N}$, $\rho = 7800\ \mathrm{kg/m^3}$

Да се намери: d

Решение

Съгласно с резултата, получен в пример 2.44, скоростта на напречните вълни по опънатата струна се дава с формулата

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}},$$

където S е площта на напречното сечение на струната, а d е нейният диаметър. За да може разтрептяната струна да издава тона „ла“, е необходимо честотата на основното трептене на струната да е $\nu_1 = \nu_{ла} = 440\ \mathrm{Hz}$. Като използваме формулата за честотите на собствените трептения на струна, получаваме

$$\nu_{ла} = \frac{2u}{L} = \frac{4}{dL}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}},$$

откъдето намираме диаметъра на струната

$$d = \frac{4}{\nu_{ла}L}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}} \approx 1{,}16\ \mathrm{mm}.$$

2.48. Катер се приближава с постоянна скорост към неподвижна лодка. Наблюдател в лодката чува звука на двигателя на катера с честота 1000 Hz. След като катерът отмине и започне да се отдалечава от лодката, наблюдателят чува звук с честота 900 Hz. Каква е скоростта на катера?

Дадено: $\nu_1 = 1000\ \mathrm{Hz}$, $\nu_2 = 900\ \mathrm{Hz}$, $u = 340\ \mathrm{m/s}$

Да се намери: v

Решение

В случая приемникът на звук е неподвижен, а се движи единствено източникът. Следователно, когато катерът се приближава към лодката, наблюдателят чува звук с честота

$$\nu_1 = \frac{\nu_0}{1-\dfrac{v}{u}},$$

където ν_0 е честотата на звука, който излъчва катерът, когато е неподвижен. Когато катерът се отдалечава, наблюдателят в лодката чува звук с честота съответно

$$\nu_2 = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v}{u}}.$$

След като разделим почленно двете уравнения и след алгебрични преобразования, намираме:

$$v = u\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \approx 18\,\text{m/s}.$$

2.49. Прилеп лети към вертикална скала със скорост 5 m/s. Той излъчва в посока към скалата ултразвуков сигнал с честота 75 kHz. Каква честота на отразения от скалата сигнал възприема прилепът?

Дадено: $\nu_0 =$ 75 kHz, v = 5 m/s, u = 340 m/s
Да се намери: ν
Решение

До скалата стига ултразвуков сигнал с честота ν_1, съответстваща на източник (прилепа), който се приближава към неподвижния приемник (стената)

$$\nu_1 = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v}{u}}.$$

Честотата на отразения от стената сигнал е еднаква с тази на падащия сигнал, ν_1. По отношение на отразения сигнал стената играе ролята на неподвижен източник с честота ν_1, а прилепът – на движещ се приемник. Следователно честотата ν, която възприема прилепът, се определя по формулата

$$\nu = \nu_1\left(1 + \frac{v}{u}\right),$$

откъдето намираме

$$\nu = \nu_0\frac{u + v}{u - v} \approx 77\,\text{kHz}.$$

Коментар. Както се вижда от получения резултат, честотата на приетия сигнал е по-голяма с 2000 Hz от честотата на излъчения сигнал! Тази разлика е достатъчно голяма, за да бъде установена от слуховия апарат на прилепа. Това позволява на прилепите, както и на редица други животни, които използват за ориентация ултразвук, да получават много точна информация не само за разположението на околните предмети, но и за тяхното движение.

2.50. Ъгълът при върха на конуса на Мах за свръхзвуков самолет е 30°. Турбината на двигателя на самолета се върти с честота 3000 Hz. Определете скоростта на самолета. Каква е честотата на звука, който стига до неподвижен наблюдател на земята, след като самолетът се отдалечи от него на разстояние, много по-голямо от височината на полета?

Дадено: $\nu_0 =$ 3000 Hz, θ = 30°, u = 340 m/s
Да се намери: v, ν_1

Решение

Скоростта на самолета намираме по формулата за ъгъла на Мах

$$v = \frac{u}{\sin\theta} = 680\,\text{m/s}.$$

Честотата на звука, който стига до наблюдателя, след като самолетът се отдалечи на голямо разстояние от него, се намира по формула за ефекта на Доплер при движещ се източник, който се отдалечава от неподвижен приемник

$$\nu_1 = \frac{\nu_0}{1+\dfrac{v}{u}} = 1000\,\text{Hz}.$$

Коментар. Каква честота на звука чува наблюдателят, докато самолетът се приближава към него? Ако приложим формула за ефект на Доплер в случай на източник, който се приближава към приемника, получаваме

$$\nu_1 = \frac{\nu_0}{1-\dfrac{v}{u}} = -3000\,\text{Hz!}$$

Има ли физичен смисъл да говорим за отрицателна честота или полученият резултат съдържа противоречие? Обяснението на получения парадокс се състои във факта, че за ефект на Доплер има смисъл да се говори само тогава, когато до приемника реално стигат вълни, излъчени от източника. Понеже самолетът се движи със скорост, по-голяма от тази на звука, звуковите вълни достигат наблюдателя едва след като самолетът е прелетял над него и е започнал да се отдалечава, или по-точно, в момента, когато фронтът на ударната вълна достигне наблюдателя. Този пример ни показва, че преди да прилагаме автоматично една формула, трябва да анализираме условията, при които тя е приложима!

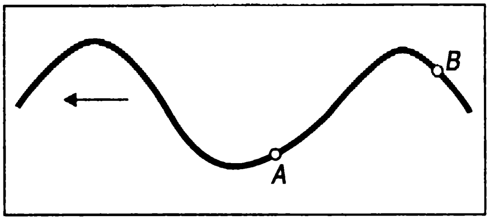
Задачи

2.51. Два камъка са хвърлени на различни места върху спокойна водна повърхност. Как можем да определим кой камък е паднал по-рано във водата?

2.52. Посетител на Големия каньон в САЩ пуска камък да пада свободно от ръба на каньона. След 18 s той чува звука от падането на камъка. Намерете височината на каньона.

2.53. На разстояние 2 km от кораб е взривена мина. Подводните сензори на кораба регистрират звука от взрива 4,5 s, преди да го чуят моряците на палубата. Намерете скоростта на звука в морската вода.

2.54. В какви посока (нагоре или надолу) се движат водните частици в т. *A* и т. *B* на фиг. 2.36, ако вълната се движи наляво?



Фиг. 2.36

2.55. Най-малкият размер на предмет, чието положение в пространството може да бъде определено с помощта на звук или ултразвук, е приблизително равен на дължината на вълната.

а) Какъв е най-малкият размер на препятствие, което може да открие прилеп, ако той излъчва ултразвук с честота 75 kHz?

б) При каква честота трябва да работи ултразвуков ехограф, така че да може да открие човешки зародиш с размер 1 mm? Зародишът е разположен във водна среда.

Скоростта на звука във въздуха е 340 m/s, а във водата – 1400 m/s.

2.56. По опънат шнур се разпространява вълна с честота 10 Hz. Определете скоростта на вълната, ако най-малкото разстояние между гребен и дол е 20 cm.

2.57. Теоретично е доказано, че скоростта u на вълните по повърхността на дълбок водоем зависи от дължината λ на вълната по закона

$$u = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}},$$

където g е земното ускорение. Рибар установил, че по време на вълнение лодката му се люлее с период 3 s. Какво е разстоянието между гребените на вълните по морската повърхност?

2.58. С какъв период ще се люлее лодката на рибаря в задача 2.57., ако тя се движи срещу вълните със скорост 2 m/s?

2.59. Как ще се промени дължината на вълната по опъната струна, ако при дадена честота: а) увеличим силата на опъване на струната 2 пъти; б) при същата сила на опъване използваме струна от същия материал, но с два пъти по-голям диаметър?

2.60. С каква сила трябва да бъде опъната медна струна с диаметър 1 mm и дължина 30 cm, така че при разтрептяване да издава тона „до“ с честота 261,6 Hz? Плътността на медта е 8900 kg/m^3.

2.61. Два делфина се приближават един към друг с еднакви скорости 3 m/s. Единият от тях излъчва ултразвуков сигнал с честота 50 kHz. С колко честотата на сигнала, която възприема вторият делфин, е по-голяма от честотата на сигнала, излъчен от първия? Скоростта на ултразвуковите вълни във вода е 1400 m/s.

2.62. Може ли пилотът на свръхзвуков самолет да чуе звука на двигателите, които се намират в задната част на самолета?

2.63. Неподвижен наблюдател върху земната повърхност чува силен гръм, когато до него стигне ударната вълна, породена от прелитащ свръхзвуков самолет. Известно е, че фронтът на ударната вълна се движи заедно със самолета. Означава ли това, че пилотът чува непрекъснато същия гръм по време на полета?

2.64. Свръхзвуков самолет лети на височина 5000 m със скорост 800 m/s. Колко време, след като самолетът прелети над наблюдател върху земната повърхност, наблюдателят ще чуе звука от самолета?

Електромагнитни трептения и вълни

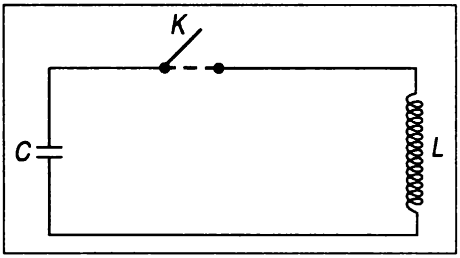
Електрически трептящ кръг се нарича затворена верига, която се състои от намотка и кондензатор (фиг. 2.37). Ако кондензаторът е предварително зареден, след неговото свързване към намотката токът през намотката и напрежението върху кондензатора започват да се изменят периодично във времето, т.е. в кръга възникват **свободни електромагнитни трептения**. Техният период се дава с **формулата на Томсън**:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC},$$

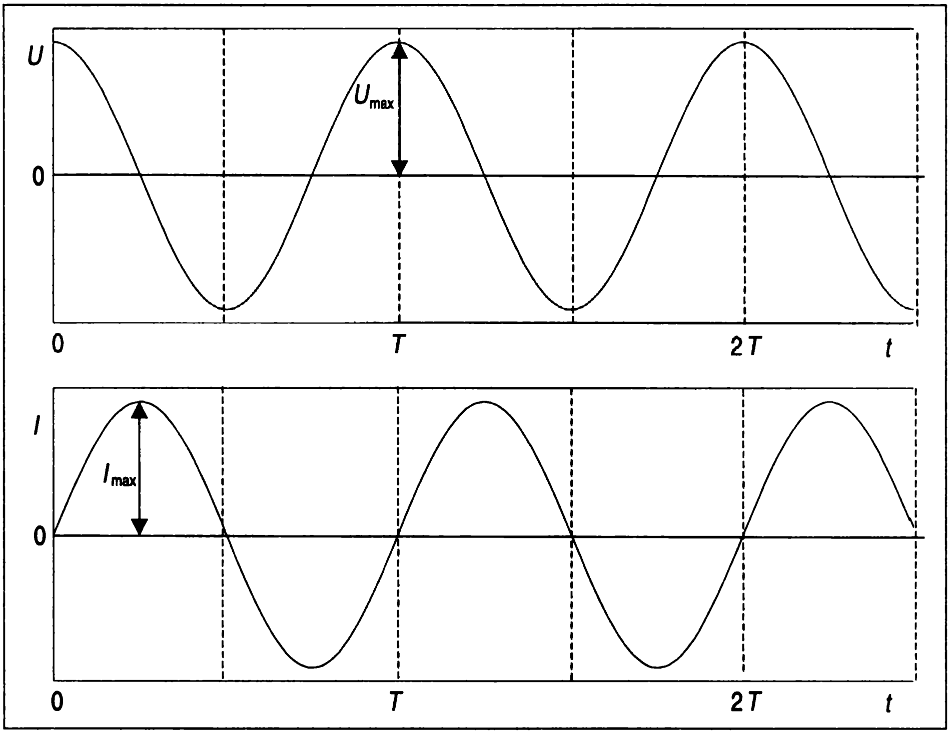
а честотата им може да бъде определена от съотношението:

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

където L е индуктивността на намотката, а C – капацитетът на кондензатора. Честотата ν_0 на свободните електромагнитни трептения се нарича **собствена честота** на трептящия кръг. Ако съпротивлението на намотката и съединителните проводници е пренебрежимо малко, токът и напрежението в кръга се изменят по хармоничен закон, т.е. трептенето е **незатихващо** и може да продължи неограничено дълго време (фиг. 2.38). Максималната по модул големина I_{max} на променливия ток в намотката се нарича амплитуда на тока, а максималната по модул стойност U_{max} на напрежението върху кондензатора – амплитуда на напрежението. Токът в намотката достига максимална стойност в моментите, когато напрежението върху кондензатора е нула. Обратно, напрежението върху кондензатора има максимална стойност в моментите, когато токът в намотката е нула (вж. фиг. 2.38).



Фиг. 2.37



Фиг. 2.38

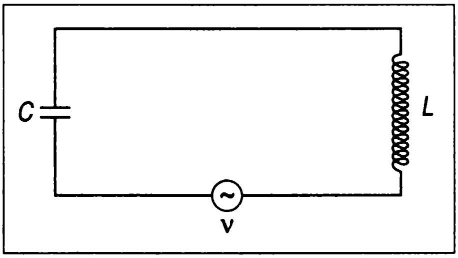
Енергията W на електрическия трептящ кръг се състои от енергията на електричното поле в кондензатора и енергията на магнитното поле в намотката

$$W = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2}.$$

При незатихващо електромагнитно трептене енергията на трептящия кръг не се променя с времето

$$W = \text{const},$$

като се преобразува периодично от електрична енергия в магнитна и обратно.



Фиг. 2.39

В действителност поради съпротивлението на съединителните проводници и на намотката енергията на трептящия кръг намалява, като се трансформира в количество топлина. Това води до постепенно намаляване на амплитудите на тока и на напрежението, т.е. свободното електромагнитно трептене в този случай е **затихващо**.

Ако в трептящия кръг е свързан източник на променливо напрежение (фиг. 2.39), в кръга възниква **принудено** електромагнитно трептене с честота, равна на честотата ν на източника. Амплитудата на тока при принудено трептене достига максимална стойност в състояние на **резонанс**, т.е. когато честотата на принуденото трептене съвпада със собствената честотата на трептящия кръг

$$\nu = \nu_0.$$

Поради този факт собствената честотата ν_0 се нарича още **резонансна честота** на трептящия кръг.

Промените на електричното поле и на магнитното поле, които възникват при електромагнитно трептене, се предават в пространството с крайна скорост под формата на **електромагнитни вълни**. Скоростта на електромагнитните вълни във вакуум се изразява чрез електричната константа ε_0 и магнитната константа μ_0 по формулата

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3{,}0.10^8 \text{ m/s},$$

и съвпада със скоростта на светлината във вакуум. Когато електромагнитна вълна се разпространява в среда с диелектрична проницаемост ε и с магнитна проницаемост μ, нейната скорост u е по-малка от тази във вакуум и се определя по формулата

$$u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}.$$

Скоростта на електромагнитната вълна u е свързана с нейните дължина λ и честота ν чрез съотношението

$$\nu\lambda = u.$$

ПРИМЕРИ

2.65. Намотка с индуктивност 3.10^{-5} H е свързана към плосък кондензатор с площ на електродите 100 cm^2 и разстояние между тях 0,1 mm. Определете диелектричната проницаемост на средата, запълваща пространството между плочите, ако резонансната честота на трептящия кръг е 0,4 MHz.

Дадено: $L = 3.10^{-5}$ H, $S = 10^{-2}$ m^2, $d = 10^{-4}$ m, $\nu_0 = 4.10^5$ Hz
Да се намери: ε
Решение

Съгласно с формулата на Томсън

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

където C е капацитетът на кондензатора. Следователно при известна резонансна честота ν и индуктивност L можем да изразим капацитета на кондензатора

$$C = \frac{1}{4\pi^2\nu_0^2 L}.$$

От друга страна, по формулата за капацитет на плосък кондензатор имаме

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

откъдето намираме диелектричната проницаемост ε на средата

$$\varepsilon = \frac{Cd}{\varepsilon_0 S} = \frac{d}{4\pi^2\nu_0^2 L\varepsilon_0 S} \approx 5{,}9.$$

2.66. Антената на радиоприемник е свързана към трептящ кръг, който се състои от намотка с постоянна индуктивност 10^{-6} H и кондензатор с променлив капацитет. Как трябва да бъде подбран капацитетът на кондензатора така, че радиоприемникът да бъде настроен към излъчването на станция в УКВ диапазона с дължина на вълната 3 m?

Дадено: $L = 10^{-6}$ H, $\lambda = 3$ m
Да се намери: C
Решение

Радиоприемникът ще приема излъчването на станцията най-ясно, когато честотата ν на радиосигнала е равна на резонансната честота на трептящия кръг

$$\nu = \nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Оттук изразяваме капацитета на кондензатора

$$C = \frac{1}{4\pi^2\nu^2 L}.$$

За да пресметнем C, трябва да изразим честотата на радиосигнала чрез дължината на вълната

$$\nu = \frac{c}{\lambda},$$

където c е скоростта на електромагнитните вълни (скоростта на светлината) във вакуум.

Окончателно намираме

$$C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 L} = 2{,}5.10^{-12}\,\text{F} = 2{,}5\,\text{pF}.$$

2.67. Трептящ кръг се състои от кондензатор с капацитет 100 nF и намотка с индуктивност 10^{-2} H (вж. фиг. 2.37). В началния момент, преди затваряне на ключа K, кондензаторът е зареден до напрежение 10 V. Определете амплитудата на променливия ток в трептящия кръг след затваряне на ключа. Колко време след затваряне на ключа токът във веригата достига за първи път максимална стойност? Приемете, че съпротивлението на намотката и на съединителните проводници е пренебрежимо малко.

Дадено: $U_0 = 10$ V, $C = 10^{-7}$ F, $L = 10^{-2}$ H
Да се намери: I_{max}, Δt
Решение

Преди затварянето на ключа енергията на електричното поле в кондензатора е

$$W = \frac{CU_0^2}{2}.$$

Непосредствено след затварянето на ключа кондензаторът започва да се разрежда през намотката и неговата енергия намалява. Заедно с това токът през намотката се увеличава и енергията на полето ѝ нараства. Токът достига своята максимална (амплитудна) стойност в момента, когато напрежението върху кондензатора е нула. Тогава първоначалната енергия на електричното поле в кондензатора се преобразува изцяло в енергия на магнитното поле в намотката

$$\frac{LI_{max}^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2},$$

откъдето намираме

$$I_{max} = U_0\sqrt{\frac{C}{L}} \approx 3{,}2\cdot 10^{-2} \text{ A}.$$

За да намерим времето Δt, е удобно да представим графично закона, по който се променя токът в трептящия кръг след затваряне на ключа (вж. фиг. 2.38). Виждаме, че интервалът от време между началния момент, в който токът е нула, и момента, в който токът достига максимална стойност, е равен на 1/4 от периода да трептене. Като използваме формулата на Томсън, намираме:

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{\pi\sqrt{LC}}{2} \approx 5.10^{-5}\text{s}.$$

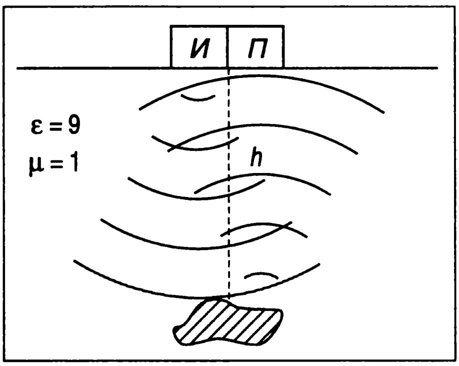
2.68. На фиг. 2.40 е показана принципна схема на металотърсач. Източникът *И* излъчва кратки електромагнитни импулси, които се отразяват от метални предмети, намиращи се под земята. Отразените сигнали се регистрират от приемника *П*, разположен непосредствено до източника. Определете дълбочината, на която е заровен метален предмет, ако приемникът регистрира отразените импулси $1{,}5.10^{-7}$ s след тяхното излъчване. Диелектричната проницаемост на почвата е $\varepsilon = 9$, а магнитната ѝ проницаемост – $\mu = 1$.

Дадено: $\Delta t = 1{,}5\cdot 10^{-7}$ s, $\varepsilon = 9$, $\mu = 1$
Да се намери: h
Решение

Излъченият сигнал достига заровения предмет след време

$$\Delta t_1 = \frac{h}{u},$$

където u е скоростта на електромагнитните вълни в почвата. Аналогично отразеният сигнал



Фиг. 2.40

достига приемника след интервал от време

$$\Delta t_2 = \frac{h}{u} = \Delta t_1.$$

Следователно времето от излъчване на сигнала до регистриране на отразения сигнал е

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2h}{u}.$$

Изразяваме скоростта на електромагнитните вълни в почвата чрез диелектричната проницаемост и магнитната проницаемост на почвата

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

след което получаваме

$$\Delta t = \frac{2h\sqrt{\varepsilon\mu}}{c},$$

откъдето намираме

$$h = \frac{c\Delta t}{2\sqrt{\varepsilon\mu}} = 7{,}5\,\text{m}.$$

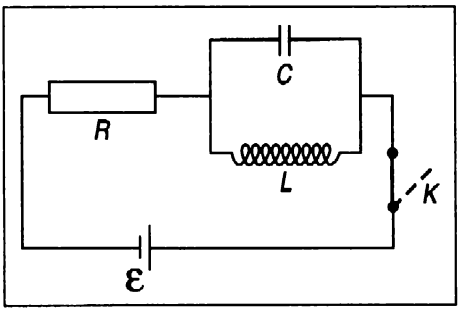
Задачи

2.69. Електрически трептящ кръг се състои от намотка и плосък кондензатор с кръгови плочи. Как се променя резонансната честота на трептящия кръг, ако: а) разстоянието между плочите се увеличи 2 пъти; б) радиусът на плочите се увеличи 2 пъти?

2.70. В радиостанция се използва трептящ кръг, който се състои от намотка с индуктивност 2.10^{-4} H и плосък кондензатор с площ на плочите 5 cm^2 и разстояние между тях 0,4 mm. За да се настрои радиостанцията на определена честота на излъчване, между плочите на кондензатора се вкарва изолираща пластина с диелектрична проницаемост $\varepsilon = 9$. Намерете в какъв интервал от честоти и в какъв интервал от дължини на вълната може да излъчва радиостанцията.

2.71. Два кондензатора с неизвестни капацитети са свързани последователно към намотка с индуктивност 3.10^{-5} H. При това собствената честота на получения трептящ кръг е 26,5 MHz. Когато същите кондензатори са свързани успоредно към намотката, собствената честота на трептящия кръг е 13,0 MHz. Пресметнете капацитетите на кондензаторите.

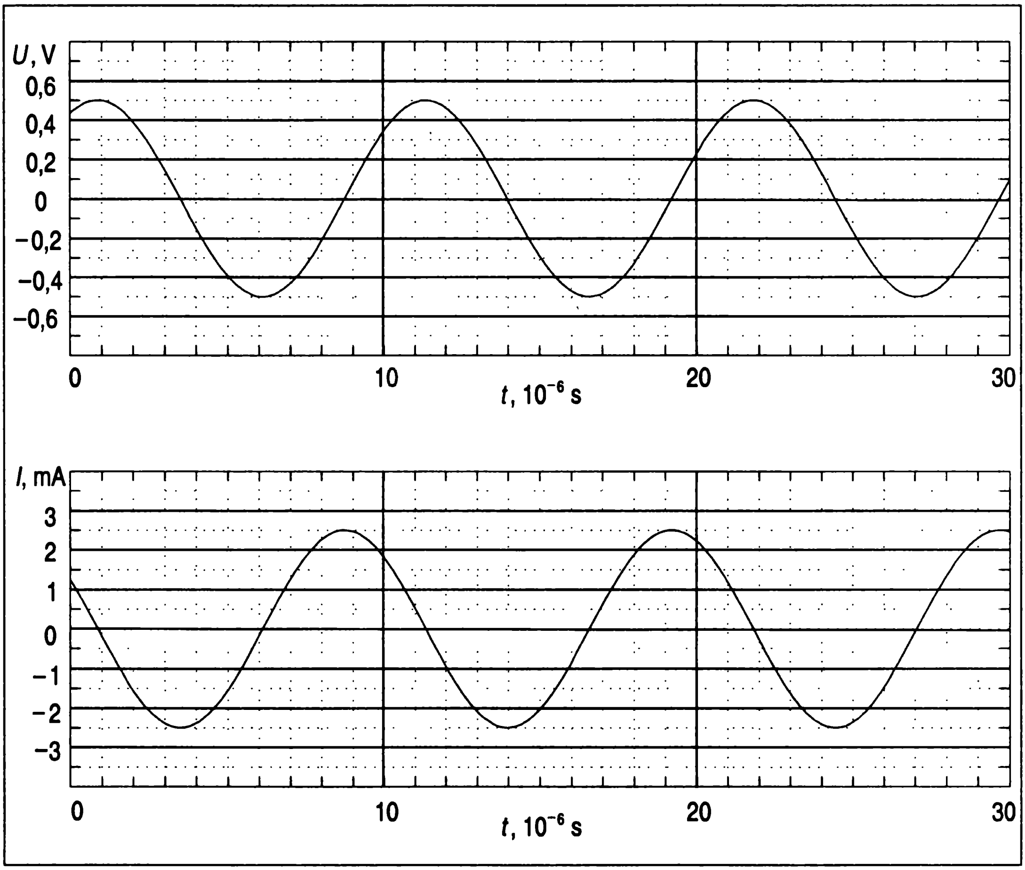
**** 2.72.** Резистор със съпротивление R, намотка с индуктивност L и кондензатор с капацитет C са свързани към източник на постоянно напрежение с ЕДН $\mathcal{E}$, както е показано на фиг. 2.41. Получете израз за максималното напрежение U_{max}, до което ще се зареди кондензаторът след



Фиг. 2.41

отваряне на ключа K. Възможно ли е напрежението върху кондензатора да стане по-голямо от ЕДН на източника? Съпротивлението на намотката и на съединителните проводници, както и вътрешното съпротивление на източника се пренебрегват.

2.73. На фиг. 2.42 са показани графики на напрежението U и тока I в трептящ кръг като функция на времето. Намерете капацитета на кондензатора и индуктивността на намотката.



Фиг. 2.42

3. СВЕТЛИНА

ГЕОМЕТРИЧНА ОПТИКА

Отражение и пречупване на светлината

Видимата светлината е съвкупност от електромагнитни вълни с честоти ν в интервала $4{,}2.10^{14}$–$7{,}5.10^{14}$ Hz. Светлината в нискочестотния край на спектъра се възприема от окото като червена, а във високочестотния – като виолетова. Съответните дължини на светлинните вълни във вакуум могат да бъдат пресметнати чрез съотношението

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

и варират между 700 nm за червената светлина и 400 nm – за виолетовата. Константата $c = 299\ 792\ 458$ m/s $\approx 3{,}0.10^8$ m/s е скоростта на светлината във вакуум. При разпространение в прозрачна среда скоростта u на светлината е по-малка от тази във вакуум и се дава с формулата

$$u = \frac{c}{n},$$

където n ($n > 1$) се нарича **показател на пречупване на средата спрямо вакуума** или само **показател на пречупване**. При преход от една среда в друга честотата на светлинната вълна не се променя, но се променя нейната дължина

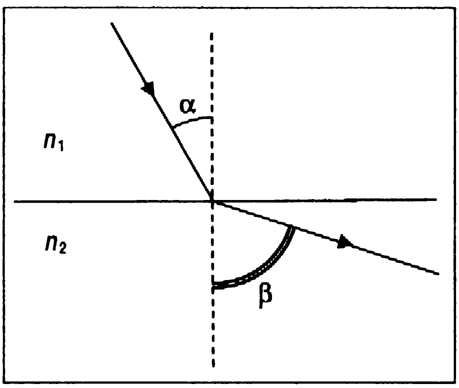
$$\lambda' = \frac{u}{\nu} = \frac{\lambda}{n},$$

където λ' е дължината на вълната в дадената среда, а λ – във вакуум.

Когато размерите на препятствията и нееднородностите на средата по пътя на светлината са значително по-големи от дължината на светлинната вълна, светлината се разпространява праволинейно (лъчево). Делът от оптиката, който изучава лъчевото разпространение на светлината, се нарича **геометрична оптика**.

Когато светлинен лъч достигне границата между две среди с различни показатели на пречупване, съответно n_1 и n_2, възникват отразен лъч и пречупен лъч (фиг. 3.1). Ъглите α, α' и β, които сключват падащият лъч, отразеният лъч и пречупеният лъч с перпендикуляра към повърхността в точката на падане, се наричат съответно **ъгъл на падане, ъгъл на отражение и ъгъл на пречупване**. При отражение и пречупване са изпълнени следните закони:

1. Падащият лъч, отразеният лъч, пречупеният лъч и перпендикулярът към повърхността лежат в една равнина.



Фиг. 3.1

2. Ъгълът на падане е равен на ъгъла на отражение: $\alpha = \alpha'$.

3. Закон на Снелиус

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta.$$

Ако светлината преминава от оптически по-плътна в оптически по-рядка среда, съществува граничен ъгъл на падане, т.нар. **ъгъл на пълно вътрешно отражение** – α_0. При този граничен ъгъл пречупеният лъч се плъзга успоредно на разделителната повърхност между двете среди (β = 90°). От закона на Снелиус следва, че

$$\sin\alpha_0 = \frac{n_2}{n_1}.$$

Когато $\alpha > \alpha_0$, във втората среда не възниква пречупен лъч. Енергията, която пренася падащата светлинна вълна, преминава изцяло в отразената вълна – налице е т.нар. **пълно вътрешно отражение**.

ПРИМЕРИ

3.1. Светлинен лъч преминава от въздух във флинт – специален вид стъкло с голям показател на пречупване. Ъгълът на падане е 60°, а ъгълът на пречупване в стъклото – 30°. Намерете показателя на пречупване на този вид стъкло. Приемете, че показателят на пречупване на въздуха е единица.

Дадено: α = 60°, β = 30°

Да се намери: n

Решение

Съгласно със закона на Снелиус

$$n\sin\beta = 1.\sin\alpha,$$

където в дясната страна сме отчели, че показателят на пречупване на въздуха е равен на 1. От горното равенство намираме търсения показател на пречупване:

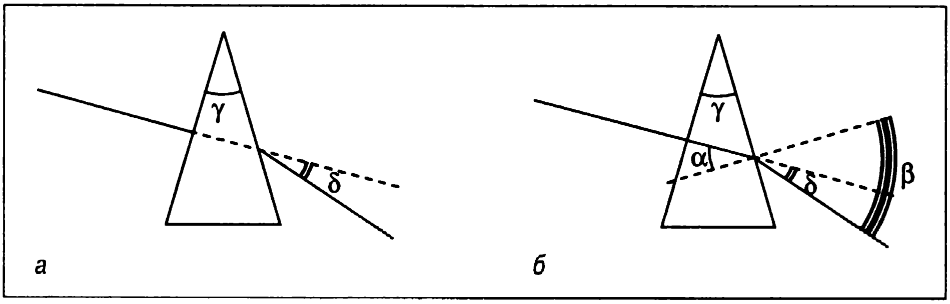
$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \approx 1{,}73.$$

Коментар. Стъклото, което използваме най-често в бита (например за прозорци, стъклени съдове и др.), има показател на пречупване, близък до 1,5. Както се вижда обаче от разгледания пример, при добавяне на подходящи примеси показателят на пречупване на стъклото може да бъде значително по-голям. Стъкло с голям показател на пречупване се използва в редица оптически уреди – лещи, призми и др.

3.2. Светлинен лъч пада перпендикулярно към едната стена на правилна триъгълна призма с показател на пречупване $n = \sqrt{2}$ (фиг. 3.2, *а*). Ъгълът при ръба на призмата е γ = 30°. На какъв ъгъл δ спрямо падащия лъч се отклонява лъчът, преминал през призмата?

Упътване. Ъгълът на отклонение δ се дефинира като ъгъл между мислените продължения на падащия лъч и преминалия лъч (фиг. 3.2, *а*).

Дадено: γ = 30°; $n = \sqrt{2}$



Фиг. 3.2

Да се намери: δ
Решение

Понеже падащият лъч е перпендикулярен спрямо първата стена на призмата, той преминава през нея, без да се пречупи. От фиг. 3.2, *б* се вижда, че ъгълът, под който лъчът пада върху втората стена на призмата, е $\alpha = \gamma = 30°$. От закона на Снелиус определяме ъгъла на пречупване β, след като лъчът премине през втората стена

$$\sin\beta = n\sin\alpha = \sqrt{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

или $\beta = 45°$.

Обърнете внимание, че в този случай светлината преминава от оптически по-плътна среда (стъкло) в оптически по-рядка среда (въздух), поради което ъгълът на пречупване е по-голям от ъгъла на падане. От фиг. 3.2, *б* се вижда, че ъгълът на отклонение е

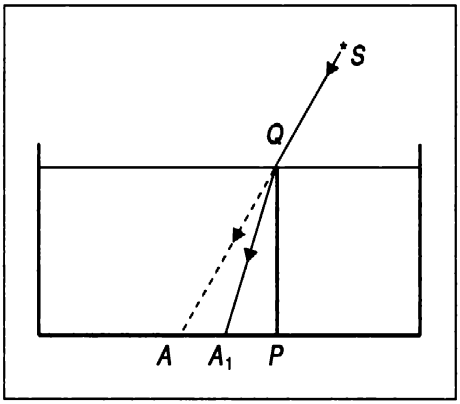
$$\delta = \beta - \alpha = 15°.$$

Коментар. Ъгълът на отклонение на светлинен лъч при преминаване през призма зависи от ъгъла на падане на светлината върху първата стена на призмата. Нашето решение се отнася за частния случай, когато този ъгъл е 0°.

3.3. В празен съд е поставена тънка пръчка с дължина l = 4,0 cm, която е закрепена перпендикулярно към дъното на съда. Пръчката е осветена от неподвижен точков източник на светлина, при което дължината на нейната сянка върху дъното е s = 5,0 cm. След като съдът е запълнен с течност до върха на пръчката, дължината на сянката на пръчката става s_1 = 3,0 cm. Намерете показателя на пречупване на течността.

Дадено: l = 4 cm, s = 5 cm, s_1 = 3 cm
Да се намери: n
Решение

От фиг. 3.3 се вижда, че дължината на сянката се определя от положението на точката, в която попада лъчът SQ, преминал покрай върха на пръчката. Когато съдът е празен, това е т. A, като $AP = s$. От триъгълника APQ намираме



Фиг. 3.3

$$\sin\alpha = \frac{AP}{AQ} = \frac{s}{\sqrt{s^2 + l^2}}.$$

Когато съдът е пълен, лъчът SQ се пречупва и попада в т. A_1, като $A_1P = s_1$. Аналогично за ъгъла на пречупване β получаваме

$$\sin\beta = \frac{A_1P}{A_1Q} = \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 + l^2}}.$$

От закона на Снелиус намираме показателя на пречупване на течността

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{s\sqrt{s_1^2 + l^2}}{s_1\sqrt{s^2 + l^2}} \approx 1{,}3.$$

Коментар. Скъсяването на сянката на предмет, поставен в течност, е явление, което позволява показателят на пречупване на дадената течност да се определи с подръчни материали. Направете подобен опит самостоятелно, като използвате за източник на светлина лампата на джобно фенерче или пряка слънчева светлина, а като вертикален предмет – кибритена клечка. Дължината на сянката можете да измерите, като разположите върху дъното на съда, успоредно на сянката, милиметрова линийка. Определете експериментално показателите на пречупване на вода и на концентриран разтвор на спирт. Сравнете получените от вас стойности с таблични данни.

3.4. Предмет с малки размери е разположен на дъното на езеро с дълбочина $h = 2$ m. Върху повърхността на водата плава кръгла платформа така, че центърът на платформата се намира на една вертикална права с предмета. Какъв трябва да бъде минималният радиус R_{min} на платформата така, че наблюдател, който се намира извън водата, да не може да види предмета на дъното? Показателят на пречупване на водата е $n = 4/3$.

Дадено: $h = 2$ m, $n = \frac{4}{3}$
Търси се: R_{min}
Решение

Наблюдателят няма да вижда предмета, ако лъчите, идващи от предмета, падат върху свободната повърхност на водата под ъгли, по-големи от ъгъла на пълно вътрешно отражение α_0 за границата вода–въздух (фиг. 3.4)

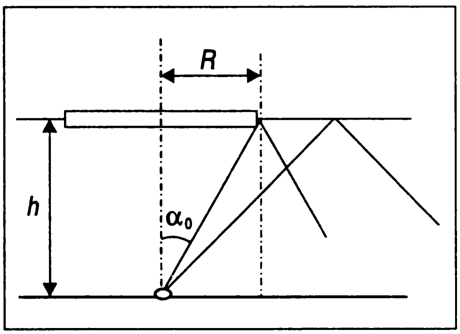
$$\alpha \geq \alpha_0.$$

От условието за пълно вътрешно отражение следва

$$\sin\alpha \geq \frac{1}{n}.$$

Най-малък ъгъл на падане имат лъчите, които достигат водната повърхност непосредствено до ръба на платформата. Тъй като за тези лъчи $\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}}$, трябва да бъде изпълнено неравенството

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \geq \frac{1}{n}.$$



Фиг. 3.4

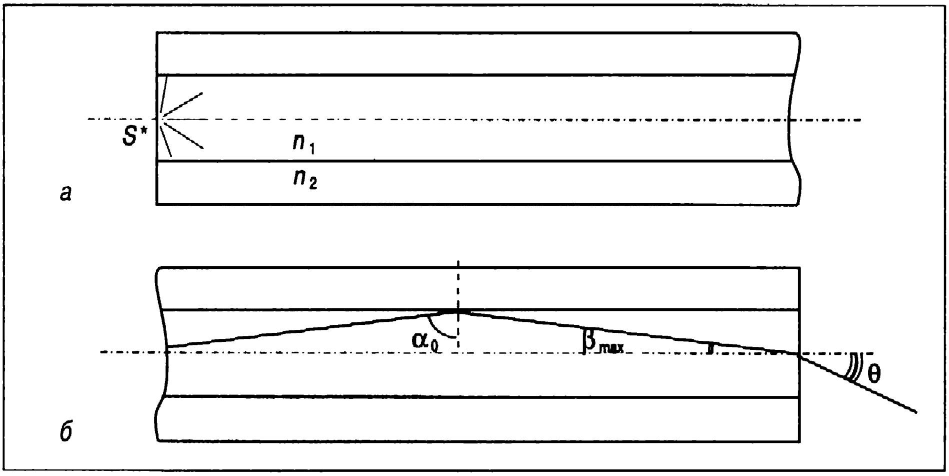
След алгебрични преобразования намираме

$$R \geq \frac{h}{\sqrt{n^2-1}}$$

или $$R_{min} = \frac{h}{\sqrt{n^2-1}} \approx 2{,}27\ \text{m}.$$

3.5 Светлинно влакно се състои от два слоя – вътрешен с показател на пречупване $n_1 = 1{,}500$ и външен с показател на пречупване $n_2 = 1{,}414$ (фиг. 3.5, *а*). Краищата на влакното са перпендикулярни спрямо оста на влакното и граничат с въздух. В единия край, върху оста на влакното, е разположен точков източник на светлина, който излъчва равномерно във всички посоки. Намерете ъгъла θ на разходимост на светлинния сноп, който излиза от вътрешния слой в другия край на влакното.

Упътване. Ъгъл на разходимост се нарича максималният ъгъл, който сключват с оста на влакното излизащите от него лъчи.



Фиг. 3.5

Дадено: $n_1 = 1{,}500$, $n_2 = 1{,}414$
Да се намери: θ
Решение

До края на влакното стигат без загуба на енергия само тези лъчи, които търпят пълно вътрешно отражение на границата между двата слоя. Те се разпространяват спрямо оста на влакното под ъгли

$$\beta \leq 90° - \alpha_0,$$

където α_0 е ъгълът на пълно вътрешно отражение за границата между слоевете. След като се пречупят от плоската повърхност в края на влакното, лъчите сключват с оста му максимален ъгъл θ, който се определя от закона на Снелиус

$$\sin\theta = n_1 \sin\beta_{max} = n_1 \sin(90° - \alpha_0) = n_1 \cos\alpha_0.$$

В равенствата използвахме показателя на пречупване n_1, защото влакното напускат само лъчи, които се разпространяват във вътрешния слой.

Като вземем предвид условието за пълно вътрешно отражение между двата слоя

$$\sin\alpha_0 = \frac{n_2}{n_1}$$

и зависимостта $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$, намираме

$$\sin\theta = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \approx 0,5.$$

или $\theta \approx 30°$.

Коментар. Както се вижда от получения резултат, светлинното влакно позволява не само пренос на светлинни сигнали на голямо разстояние, но и получаване на насочен светлинен сноп. Колкото по-малка е разликата между показателите на пречупване на двата слоя, толкова по-насочен е излизащият от влакното сноп. Лъчите, които падат върху границата между слоевете под ъгли, по-малки от α_0, т.е. сключват с оста на влакното ъгли $\beta > 90° - \alpha_0$, губят при всяко отражение част от своята енергия, поради което на практика не достигат края на влакното.

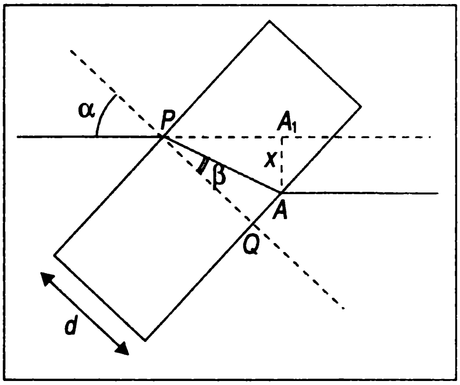
3.6. Светлинен лъч пада перпендикулярно към повърхността на плоско-паралелна пластина, която има дебелина d и показател на пречупване n. На какво разстояние x спрямо своето първоначално положение ще се отмести преминалият лъч, ако пластината се завърти на ъгъл α?

Дадено: d, n, α
Да се намери: x
Решение

От фиг. 3.6 се вижда, че когато пластината се завърти на ъгъл α, падащият лъч сключва същия ъгъл с перпендикуляра PQ към пластината. Преминалият в пластината лъч сключва с перпендикуляра ъгъл β такъв, че

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}.$$

Нека преминалият лъч излиза от пластината в т. A от долната повърхност на пластината, а т. A_1 е проекцията на A върху продължението на падащия лъч. Тогава за търсеното отместване имаме



Фиг. 3.6

$$x = AA_1 = PA\sin(\sphericalangle APA_1).$$

Лесно се установява, че: $\sphericalangle APA_1 = \alpha - \beta$ и $PA = \dfrac{d}{\cos\beta}$. Като използваме закона на Снелиус и зависимостите:

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} \quad \text{и} \quad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

намираме окончателно

$$x = d\sin\alpha\left(1 - \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right).$$

Коментар. Както видяхме от пример 3.2, при преминаване през призма светлинният лъч се отклонява на определен ъгъл спрямо първоначалната си посока на разпространение. При преминаване през плоскопаралелна пластинка обаче преминалият лъч остава успореден на първоначалната си посока на разпространение, т.е. ъгълът на отклонение е нула.

3.7. Успореден светлинен сноп с диаметър на напречното сечение $a = 1$ mm пада под ъгъл $\alpha = 30°$ към перпендикуляра на плоско-паралелна пластина. Светлинният сноп е съставен от две монохроматични светлинни вълни с различни честоти, съответно ν_1 и ν_2. Показателите на пречупване на стъклото, от което е изработена пластината, за тези честоти са съответно $n_1 = 1{,}73$ и $n_2 = 1{,}75$. Каква трябва да бъде минималната дебелина d_{min} на пластината, за да може след излизане от нея двете вълни да се разпространяват като два отделни, монохроматични светлинни снопа.

Дадено: $a = 1$ mm, $\alpha = 30°$, $n_1 = 1{,}73$, $n_2 = 1{,}75$

Да се намери: d_{min}

Решение

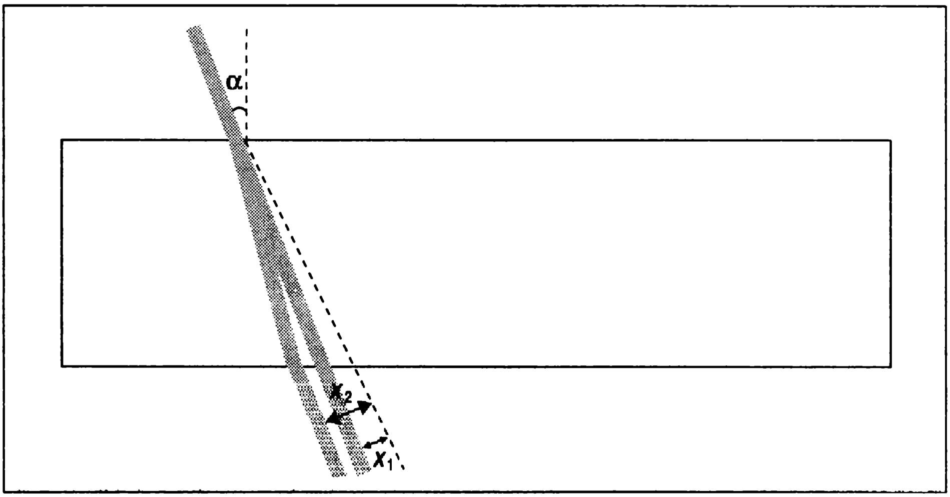
Като използваме резултата от пример 3.6, намираме, че двата снопа се отклоняват на различни разстояния x_1 и x_2 спрямо падащия сноп

$$x_1 = d\sin\alpha\left(1 - \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2\alpha}}\right)$$

и $$x_2 = d\sin\alpha\left(1 - \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2\alpha}}\right)$$

като $x_1 < x_2$ (фиг. 3.7). След като излязат от пластината, двата снопа имат същите диаметри a като падащия сноп. За да бъдат разделени излизащите снопове (т.е. да не се наслагват един върху друг), е необходимо

$$x_2 - x_1 \geq a$$



Фиг. 3.7

или $$d\sqrt{1-\sin^2\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{n_1^2-\sin^2\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{n_2^2-\sin^2\alpha}}\right)\geq a.$$

От последното равенство намираме

$$d_{\min}=\frac{a\sqrt{n_1^2-\sin^2\alpha}\sqrt{n_2^2-\sin^2\alpha}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}\left(\sqrt{n_2^2-\sin^2\alpha}-\sqrt{n_1^2-\sin^2\alpha}\right)}=15{,}3\text{cm}.$$

Коментар. Примерът показва, че за да се разложи светлината с помощта на плоскопаралелна пластина, е необходим дебел слой стъкло, което прави този метод практически неприложим.

3.8. В аквариум на дълбочина h = 20 cm е разположен предмет с малки размери. Каква е видимата дълбочина h' на предмета за наблюдател, намиращ се над водата? Показателят на пречупване на водата е n = 4/3. Окото на наблюдателя и предмета се намират на една и съща вертикална права.

Дадено: h = 20 cm, $n=\frac{4}{3}$
Да се намери: h'
Решение

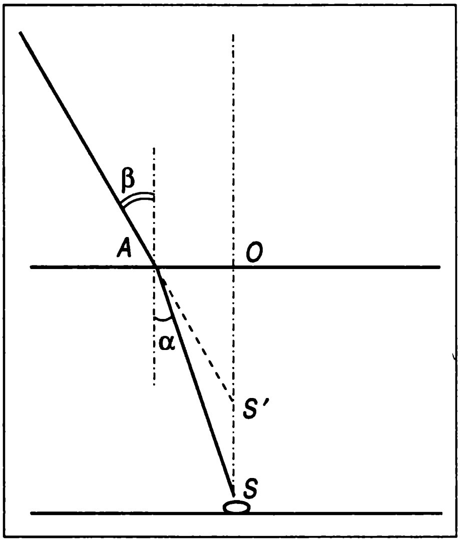
Разглеждаме светлинен лъч, който идва от предмета S и пресича повърхността на водата в т. A (фиг. 3.8). Мисленото продължение на пречупения лъч пресича вертикалата SO в точка S', която е недействителен образ на предмета. Видимата дълбочина на предмета е равна на разстоянието $S'O$ между недействителния образ и повърхността на водата. От чертежа се вижда, че

$$OA = SO\text{tg}\alpha = h.\text{tg}\alpha$$

и $$OA = S'O\,\text{tg}\beta = h'.\text{tg}\beta.$$

От тези равенства намираме

$$h' = h\frac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}\beta}.$$



Фиг. 3.8

Характерният размер на зеницата на окото е около 1 mm. Ако приемем, че наблюдателят се намира на разстояние около 1 m от предмета, в окото му ще попадат лъчи, които се разпространяват под ъгли $\beta < 0{,}1°$. Тъй като $\alpha < \beta$, следва, че и $\alpha < 0{,}1°$. За такива ъгли можем да приемем, че

$$\text{tg}\alpha \approx \sin\alpha$$

и $$\text{tg}\beta \approx \sin\beta.$$

Тъй като от закона на Снелиус имаме $\sin\beta = n\sin\alpha$, е в сила приблизителното равенство $\text{tg}\beta \approx n\,\text{tg}\alpha$. Тогава окончателно намираме

$$h' \approx \frac{h}{n} = 15\text{cm}.$$

Коментар. Можете лесно да установите, като наблюдавате дъното на басейн (или на съд, пълен с вода), че басейнът (съдът) изглежда значително по-плитък, отколкото е истинската му дълбочина. Следва да подчертаем, че решението се основава на предположението за малки ъгли α и β. В действителност продълженията на лъчите, които достигат окото под различни ъгли, пресичат вертикалата в различни точки, т.е. образът на предмета не е идеална точка, а е леко размит.

3.9. Колко е видимата широчина d на стълба живак в стъклената тръбичка на термометър. Вътрешният радиус на тръбичката е $r = 0{,}5$ mm, а показателят на пречупване на стъклото – $n = 1{,}5$. Окото на наблюдателя е разположено спрямо тръбичката на разстояние, което значително превишава нейния външен радиус.

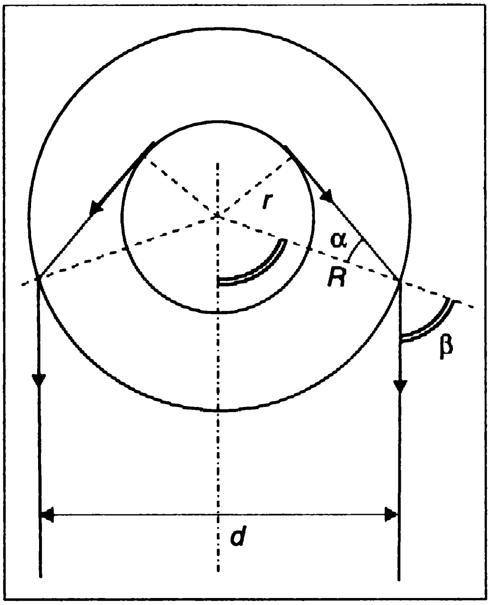
Дадено: $r = 0{,}5$ mm, $n = 1{,}5$
Да се намери: d
Решение

От повърхността на живака до окото на наблюдателя стига практически успореден сноп лъчи, понеже наблюдателят е разположен на голямо разстояние от тръбичката. Широчината на този сноп лъчи е равна на видимата широчина на стълба живак. Както се вижда от фиг. 3.9, крайните лъчи на снопа са допирателни към вътрешната повърхност на стъклената тръбичка. От чертежа установяваме следните геометрични съотношения

$$\sin\alpha = \frac{r}{R} \quad \text{и} \quad \sin\beta = \frac{d/2}{R},$$

където R е външният радиус на тръбичката. От закона на Снелиус $\sin\beta = n\sin\alpha$ и от установените равенства намираме:

$$d = 2nr = 1{,}5 \text{ mm}.$$



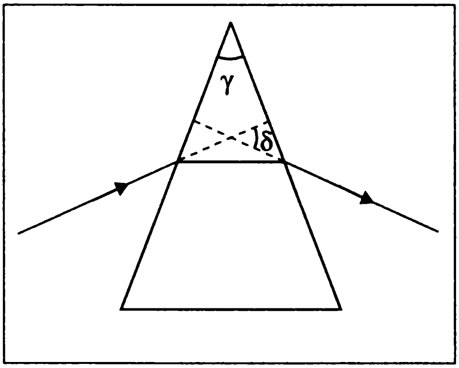
Фиг. 3.9

Коментар. Както виждаме от получения резултат, видимата широчина на живачния стълб е 1,5 пъти по-голяма от неговия истински диаметър. Това означава, че стъклената тръбичка играе ролята на лупа – факт, който ни позволява да виждаме ясно тънкия живачен стълб в термометъра.

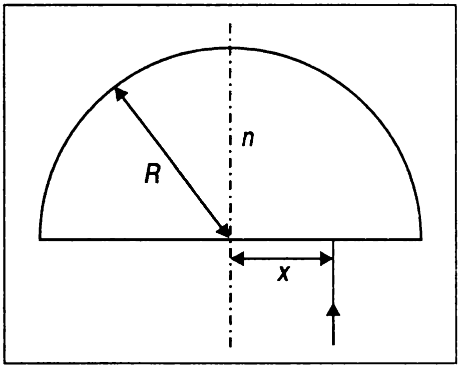
Задачи

3.10. Под какъв ъгъл трябва да пада светлинен лъч върху флинт с показател на пречупване $n = \sqrt{3}$ така, че отразеният лъч и пречупеният лъч да са взаимно перпендикулярни?

3.11. Светлинен лъч преминава през равнобедрена призма така, че вътре в призмата лъчът е успореден на основата (фиг. 3.10). Ъгълът при върха на призмата е $\gamma = 50°$, а ъгълът на отклонение на лъча при преминаване през призмата – $\delta = 45°$. Намерете показателя на пречупване на материала, от който е изработена призмата.



Фиг. 3.10

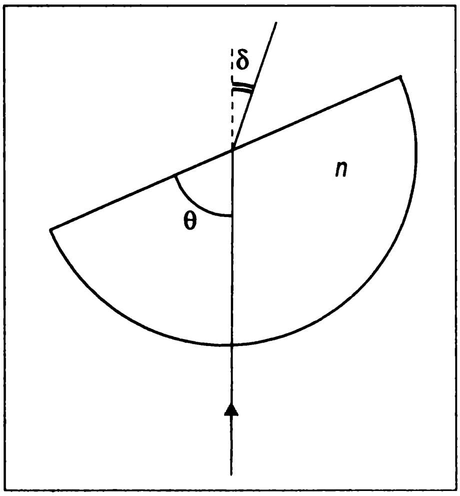


Фиг. 3.11

3.12. Светлинен лъч пада перпендикулярно към плоската стена на стъклен полуцилиндър с радиус $R = 4{,}5$ cm и показател на пречупване $n = 1{,}5$ (фиг. 3.11). Намерете разстоянието x между падащия лъч и центъра на кръга, при което преминалият в стъклото лъч няма да може да излезе през цилиндричната повърхност.

3.13. Светлинен лъч пада перпендикулярно към цилиндричната повърхност на стъклен полуцилиндър (фиг. 3.12). Плоската стена на полуцилиндъра сключва ъгъл $\theta = 60°$ с посоката на разпространение на падащия лъч. Преминалият през полуцилиндъра лъч се отклонява на ъгъл $\delta = 20°$ спрямо падащия лъч. Намерете показателя на пречупване n на стъклото, от което е изработен полуцилиндърът.

Упътване. За извършване на числените пресмятания трябва да използвате калкулатор или тригонометрична таблица.

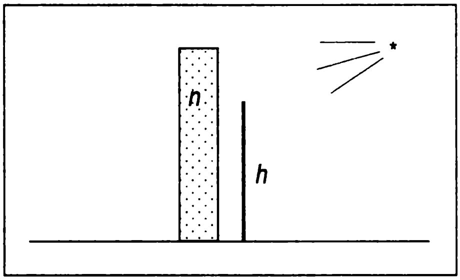


Фиг. 3.12

3.14. Дължината на сянката на вертикален предмет с височина $h = 4$ cm е $l = 6$ cm. Зад предмета е поставена във вертикално положение стъклена пластина с дебелина d = 1 cm (фиг. 3.13). Ще се скъси ли, или ще се удължи сянката на предмета? С колко сантиметра? Показателят на пречупване на стъклото е n = 1,5. Предметът е осветен от неподвижен точков източник.

Упътване. От полза може да ви бъде следната тригонометрична формула

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}.$$

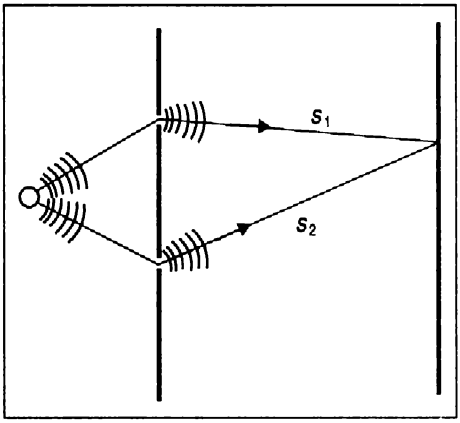


Фиг. 3.13

ВЪЛНОВА ОПТИКА

Интерференция и дифракция

Когато размерите на препятствията и нееднородностите на средата са съпоставими с дължината на светлинната вълна, се наблюдава **дифракция** – светлината заобикаля частично или изцяло препятствията и попада в областта на т.нар. **геометрична сянка**. Ако светлинните вълни от два или повече **кохерентни** (излъчващи съгласувано) източника се наложат в пространството, се наблюдава **интерференция** – светлинните вълни се усилват в определени точки – **интерференчни максимуми**, и се гасят в други точки – **интерференчни минимуми**. В опита на Юнг (фиг. 3.14) светлината от един монохроматичен източник преминава през два малки отвора, които играят ролята на кохерентни източници на светлина. Обикновено интерференцията се наблюдава върху екран, разположен зад преградата с отворите. Характерът на интерференцията в дадена точка от екрана зависи от т.нар. **разлика в ходовете**



Фиг. 3.14

$$\Delta = s_1 - s_2,$$

където s_1 и s_2 са пътищата, които изминават двете вълни от източниците до дадената точка. Условието за наблюдаване на интерференчен максимум в дадена точка от екрана е

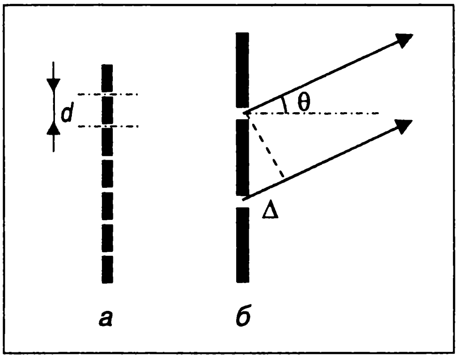
$$\Delta = k\lambda,$$

където λ е дължината на светлинната вълна в дадената среда, а $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ се нарича **порядък** на максимума. Условието за интерференчен минимум е съответно

$$\Delta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

където k цяло число.

Дифракционна решетка се нарича пластинка с голям брой тесни, разположени на еднакви разстояния един от друг процепи. Разстоянието d между два съседни процепа се нарича **константа** на дифракционната решетка (фиг. 3.15, *а*). Когато светлината преминава през дифракционната решетка, върху екран, разположен зад решетката, се наблюдава поредица от максимуми. Те се дължат на едновременното усилване на вълните, преминали през всички процепи на решетката. Обикновено интерференчната картина се наблюдава на разстояние L от дифракционната решетка, което значително превишава размера на самата решетка. В този случай в дадена точка на екрана се събират практически успоредни лъчи, които сключват приблизително еднакви ъгли θ с перпендикуляра към решетката (фиг. 3.15, *б*). Когато светлината пада перпендикулярно спрямо повърхността на решетката, разликата в ходовете на лъчите от два съседни процепа до дадена точка на екрана е



Фиг. 3.15

$$\Delta = d\sin\theta.$$

Условието за максимум от k-ти порядък ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) е съответно

$$d\sin\theta_k = k\lambda,$$

Използват се и т.нар. **отражателни** дифракционни решетки, върху които вместо процепи през равни разстояния са нанесени успоредни отразяващи ивици.

ПРИМЕРИ

3.15. Перпендикулярно на дифракционна решетка, намираща се във въздух, пада успореден сноп монохроматична светлина. Максимумът от първи порядък се наблюдава под ъгъл $\theta = 42°$ спрямо перпендикуляра към решетката. Ако решетката е във вода, максимумът от първи порядък се наблюдава под ъгъл $\varphi = 30°$. Пресметнете показателя на пречупване на водата.

Дадено: $k = 1$ (порядък на максимума); $\theta = 42°$; $\varphi = 30°$

Да се намери: n

Решение

От условието за интерференчен максимум, при $k = 1$, намираме

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{d},$$

където d е константата на решетката, а λ – дължината на светлинната вълна във въздуха. Когато светлината от същия източник се разпространява във вода, дължината λ' на светлинната вълна намалява в сравнение с дължината на вълната във въздух

$$\lambda' = \frac{\lambda}{n}.$$

Тогава условието за интерференчен максимум във водата изглежда по следния начин

$$\sin\varphi = \frac{\lambda'}{d} = \frac{\lambda}{nd},$$

откъдето намираме

$$n = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{\sin 42^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{0{,}669}{0{,}500} \approx 1{,}34.$$

3.16. Успореден сноп монохроматична светлина с дължина на вълната λ = 500 nm пада перпендикулярно към дифракционна решетка с константа d = 5,3 μm. Колко интерференчни максимума се наблюдават върху екран, разположен зад дифракционната решетка? Приемете, че разстоянието между решетката и екрана значително превишава размера на самата решетка.

Дадено: λ = 500 nm, d = 5,3 μm
Да се намери: N
Решение

Максимуми върху екрана се наблюдават в направленията, сключващи с перпендикуляра към решетката ъгли θ_k, за които

$$\sin\theta_k = \frac{k\lambda}{d}.$$

Понеже $\theta_k < 90^\circ$ и съответно $\sin\theta_k < 1$, получаваме

$$k_{max} < \frac{d}{\lambda} = 10{,}6,$$

където k_{max} е най-големият порядък на интерференчните максимуми върху екрана. Понеже k_{max} е цяло число

$$k_{max} = 10.$$

За да определим общия брой на максимумите, трябва да си припомним, че максимумите от ненулев порядък са разположени симетрично спрямо централния (k = 0) порядък. Тогава общият брой максимуми е

$$N = 2k_{max} + 1 = 21.$$

Коментар. В математиката често се използва функцията [x] (чете се: „скобка x“), която се дефинира като най-голямото цяло число, непревишаващо x. С помощта на тази функция можем да запишем общ израз за броя на интерференчните максимуми

$$N = 2\left[\frac{d}{\lambda}\right] + 1.$$

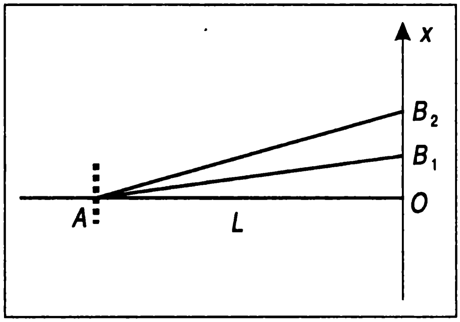
3.17. Тесен сноп монохроматична светлина с дължина на вълната λ = 500 nm пада перпендикулярно към дифракционна решетка с константа d = 1,20 μm. На разстояние L = 10,0 cm зад решетката е разположен екран. Какви са разстоянията Δx_{10} между интерференчните максимуми от първи и нулев порядък и Δx_{21} – между втори и първи порядък? Какви условия трябва да бъдат изпълнени, за да може върху екрана да се наблюдават максимуми, разположени през приблизително еднакви разстояния?

Дадено: λ = 500 nm, d = 1,20 μm,. L = 0,1 m
Да се намери: Δx_{10}, Δx_{21}

Решение

Означаваме с A точката, в която светлинният сноп пада върху дифракционната решетка (фиг. 3.16). Върху екрана избираме ос x, чието начало O съвпада с нулевия максимум. Означаваме с B_1 и B_2 точките, в които са разположени съответно съседните максимуми от първи и втори порядък. Съгласно с условието за максимум

$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{d} \text{ и } \sin\theta_2 = \frac{2\lambda}{d}.$$



Фиг. 3.16

От друга страна,

$$OB_1 = L\text{tg}\theta_1 = \frac{L\sin\theta_1}{\sqrt{1+\sin^2\theta_1}} = \frac{L\lambda}{\sqrt{d^2+\lambda^2}} = 0{,}0385\,\text{m}$$

и $$OB_2 = L\text{tg}\theta_2 = \frac{L\sin\theta_2}{\sqrt{1+\sin^2\theta_2}} = \frac{2L\lambda}{\sqrt{d^2+4\lambda^2}} = 0{,}0640\,\text{m}.$$

Оттук намираме

$\Delta x_{10} = OB_1 = 3{,}85$ cm

$\Delta x_{21} = OB_2 - OB_1 = 2{,}55$ cm.

За да отговорим на втория въпрос, ще запишем общата формула за координатата x_k на k-тия максимум върху екрана

$$x_k = L\text{tg}\theta_k = \frac{L\sin\theta_k}{\sqrt{1+\sin^2\theta_k}},$$

където $\sin\theta_k = \frac{k\lambda}{d}$. Ако е изпълнено условието

$$\left(\frac{k\lambda}{d}\right)^2 << 1,$$

можем да пренебрегнем $\sin^2\theta_k$ в знаменателя и така да получим

$$x_k \approx \frac{kL\lambda}{d}.$$

Тогава разстоянието между два съседни максимума – k-ти и k – 1-ви, е

$$\Delta x \approx \frac{L\lambda}{d}$$

и е приблизително еднакво за всички двойки съседни максимуми независимо от стойността на k. Нека например при същата дължина на вълната $\lambda = 500$ nm използваме дифракционна решетка с константа $d = 12\ \mu\text{m} = 12\,000$ nm. Тогава $\left(\frac{k\lambda}{d}\right)^2 < 0{,}1$ за $k < 7$. Следователно можем да приемем, че стойността $\Delta x \approx 0{,}417$ cm, изчислена по приблизителната формула, дава резултат, който се различава с не повече от 10 % за всички двойки последователни максимуми от 1-ви до 6-и включително. Този извод се потвърждава, ако изчислим точно положенията x_k на максимумите и разстоянията $\Delta x = x_k - x_{k-1}$ между тях, както е показано в таблицата по-долу

k	x_k, cm	Δx, cm
0	0	
1	0,417	0,417
2	0,836	0,419
3	1,259	0,423
4	1,690	0,430
5	2,130	0,439
6	2,581	0,451
7	3,049	0,467
8	3,535	0,486
9	4,045	0,509
10	4,583	0,538

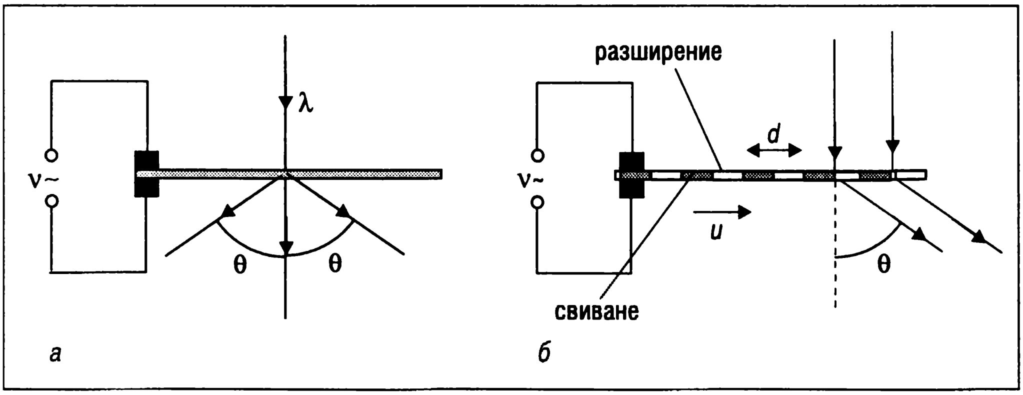
3.18. Върху двете повърхности на тънка кварцова пластинка са нанесени електроди, към които е подадено променливо напрежение с честота $\nu = 10$ GHz (фиг. 3.17, *а*). Поради пиезоелектричните свойства на кварца електричният сигнал поражда ултразвукова вълна в пластинката. Перпендикулярно спрямо пластинката пада монохроматичен светлинен сноп с дължина на вълната $\lambda = 514$ nm. След преминаване през пластинката се наблюдават три светлинни снопа – един, който се разпространява в направлението на падащия сноп, и два, странични, под еднакви ъгли $\theta = 60°$ спрямо него.

а) Обяснете това явление.

б) Пресметнете скоростта на звука u в кварца.

Дадено: $\nu = 10$ GHz, $\theta = 60°$; $\lambda = 514$ nm
Да се намери: u
Решение

а) Звуковата (или ултразвуковата) вълна в пластинката представлява периодична последователност от области с по-голяма и с по-малка плътност (фиг. 3.17, *б*). Там, където плътността на кварца е по-голяма, показателят на пречупване е по-голям и поглъщането на светлината е по-силно, отколкото в областите, където плътността е по-малка. При много високи честоти на звука разстоянието между съседните области с различна плътност



Фиг. 3.17

е съпоставимо с дължината на светлинната вълна. Тогава при преминаване на светлина през пластинката настъпва дифракция, а самата пластинка може да се разглежда като дифракционна решетка. Централният преминал сноп е интерференчен максимум от нулев порядък, а двата странични – максимуми от първи порядък.

б) Константата на дифракционната решетка е равна на разстоянието между две съседни области с еднаква плътност, т.е. на дължината на звуковата вълна

$$d = \frac{u}{\nu}.$$

От условието за интерференчен максимум от първи порядък намираме

$$\frac{u}{\nu}\sin\theta = \lambda,$$

откъдето определяме скоростта на звука в кварца

$$u = \frac{\lambda\nu}{\sin\theta} \approx 5940\,\mathrm{m/s}.$$

3.19. Светлинен сноп от хелий-неонов лазер с дължина на вълната $\lambda_0 = 633$ nm преминава през дифракционна решетка. Зад решетката се наблюдават три максимума – един от нулев порядък и два – от първи порядък, разположени под еднакви ъгли $\theta_1 = 39°$ спрямо перпендикуляра към решетката. Когато през решетката преминава светлина от аргонов лазер, се наблюдават 5 максимума, като максимумите от първи порядък са разположени под ъгли $\varphi_1 = 29°$ спрямо перпендикуляра, а тези от втори порядък – под ъгли $\varphi_2 = 77°$. Пресметнете дължината λ на вълната на аргоновия лазер. Оценете грешката на получения резултат.

Дадено: $\theta_1 = 39°$; $\lambda_0 = 514$ nm; $\varphi_1 = 29°$; $\varphi_2 = 77°$

Да се намери: λ

Решение

От условието за интерференчен максимум от първи порядък за хелий-неоновия лазер можем да изразим константата на дифракционната решетка

$$d = \frac{\lambda_0}{\sin\theta_1}.$$

Ако през решетката преминава светлина с дължина на вълната λ, интерференчните максимуми се наблюдават под ъгли φ_k такива, че

$$\sin\varphi_k = \frac{k\lambda}{d} = \frac{k\lambda}{\lambda_0}\sin\theta_1,$$

откъдето можем да намерим търсената дължина на вълната

$$\lambda = \frac{\lambda_0 \sin\varphi_k}{k\sin\theta_1}.$$

Ако заместим в последната формула данните за $k = 1$ и $k = 2$, получаваме следните числени резултати

k	λ, nm
1	487,6
2	490,0

Виждаме, че стойностите на λ, пресметнати за различни k, се различават с 1,4 nm. Тази разлика се дължи на факта, че ъглите θ_1, φ_1 и φ_2 са измерени с определена експериментална грешка – около 1°, ако съдим по броя на значещите цифри. В този случай като най-достоверна стойност за λ трябва да приемем средната аритметична стойност на двете измервания

$$\lambda_{ср} \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} = \frac{487{,}6+490{,}0}{2} = 488{,}3\,\mathrm{nm}.$$

Абсолютната грешка Δλ на измерването можем да оценим като средно отклонение (по абсолютна стойност) на отделните измервания спрямо $\lambda_{ср}$

$$\Delta\lambda = \frac{|\lambda_1-\lambda_{ср}|+|\lambda_2-\lambda_{ср}|}{2} = 0{,}7\,\mathrm{nm}.$$

Крайният резултат се представя във вида

$\lambda = (488{,}3 \pm 0{,}7)$ nm.

3.19. Монохроматичен светлинен сноп с дължина на вълната λ = 500 nm пада под ъгъл φ = 30° спрямо перпендикуляра към отразяваща дифракционна решетка с константа d = 1 μm. Намерете под какви ъгли спрямо перпендикуляра са разположени съответно максимумите от –1-ви, нулев и +1-ви порядък.

Дадено: λ_0 = 500 nm, φ = 30°; d = 1 μm
Да се намери: θ_{-1}, θ_0, θ_1
Решение

Особеното в тази задача е, че лъчите 1 и 2, излизащи от източника S, изминават различни пътища r_1 и r_2, преди да попаднат върху отразяващите ивици на решетката (фиг. 3.18, *а*). Ще означим с Δ′ разликата в пътищата между лъча 2 и лъча 1 преди отражението

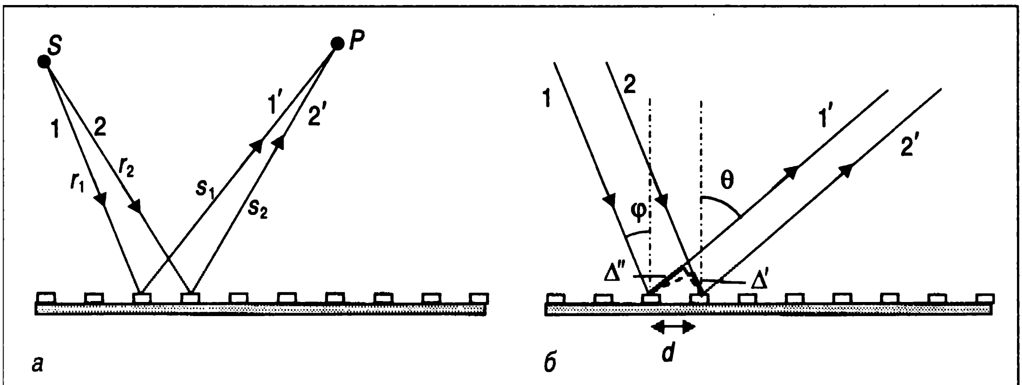
$$\Delta' = r_2 - r_1.$$

От друга страна, отразените лъчи 1′ и 2′ изминават различни пътища s_1 и s_2, докато попаднат в точката P на наблюдение. От фиг. 3.18, *а* е ясно, че ако $r_2 > r_1$, то $s_2 < s_1$. Поради това ще означим с Δ″ разликата в пътищата между лъча 1′ и лъча 2′

$$\Delta'' = s_1 - s_2.$$

Очевидно пълната разлика в пътищата на двата лъча от източника до точката на наблюдение е $\Delta = \Delta'' - \Delta'$, а условието за интерференчен максимум

$$\Delta'' - \Delta' = k\lambda.$$



Фиг. 3.18

На практика винаги разстоянията от източника до решетката и от решетката до точката на наблюдение значително превишават разстоянието d между съседните отразяващи ивици (или пропускащи процепи). Това означава, че лъчите, падащи върху съседни отразяващи ивици, са практически успоредни. От фиг. 3.18, *б* следва, че

$$\Delta' = d\sin\varphi.$$

Аналогично получаваме

$$\Delta'' = d\sin\theta.$$

Тогава получаваме, че интерференчни максимуми за отразената светлина ще се наблюдават в направления, които сключват с перпендикуляра към решетката ъгли θ_k, за които

$$d\sin\theta_k - d\sin\varphi = k\lambda$$

или $$\sin\theta_k = \sin\varphi + \frac{k\lambda}{d}.$$

Първо ще разгледаме максимума от нулев порядък ($k = 0$)

$$\sin\theta_0 = \sin\varphi,$$

откъдето следва $\theta_0 = \varphi$.

При $k = 1$ имаме $\sin\theta_1 = 1$ или $\theta_1 = 90°$. Това означава, че максимумът от 1-ви порядък се наблюдава в направление, успоредно на отразяващата повърхност.

При $k = -1$ получаваме $\sin\theta_{-1} = 0$ или $\theta_{-1} = 0°$, т.е. максимумът от -1-ви порядък се наблюдава перпендикулярно спрямо повърхността на решетката.

Коментар. Получихме, че за максимума от нулев порядък е изпълнен познатият ни закон за отражение: ъгълът на падане е равен на ъгъла на отражение. Всъщност този резултат е едно от доказателствата на закона за отражение. Действително една гладка отразяваща повърхност може да се разглежда като дифракционна решетка с константа $d = 0$. В този случай от условието за максимум следва, че възниква единствено интерференчен максимум от нулев порядък, т.е. цялата отразена светлина се разпространява в направление, което сключва с перпендикуляра ъгъл $\theta_0 = \varphi$.

Задачи

3.20. Монохроматичен светлинен сноп пада перпендикулярно спрямо повърхността на дифракционна решетка. Интерференчният максимум от първи порядък се наблюдава под ъгъл 15° спрямо перпендикуляра към решетката. Какъв е общият брой N на максимумите? Използвайте, че $\sin 15° \approx 0{,}2588$.

3.21. Върху едната стена на аквариум е разположена дифракционна решетка, през която минава монохроматичен светлинен сноп. Когато аквариумът е празен, върху срещуположната стена се наблюдават интерференчни ивици, разположени през приблизително еднакви разстояния $\Delta x = 2{,}0$ mm. Какво е разстоянието Δx_1 между ивиците, когато аквариумът е пълен с вода? Показателят на пречупване на водата е $n = 1{,}33$.

3.22. Успореден светлинен сноп от натриева лампа ($\lambda = 489$ nm) преминава през дифракционна решетка с неизвестна константа d. Приблизителните стойности на ъглите, под които се наблюдават максимуми от различни порядъци, са дадени в таблицата по-долу.

k	θ°
1	6
2	11
3	17

Пресметнете приблизително константата на дифракционната решетка и грешката Δd при нейното измерване.

3.23. Монохроматичен светлинен сноп с дължина на вълната $\lambda = 400$ nm пада под ъгъл $\varphi = 30^{\circ}$ спрямо нормалата към пропускаща дифракционна решетка с константа $d = 1{,}2$ μm.

а) Под какви ъгли спрямо перпендикуляра към решетката са разположени съответно максимумите от −1-ви, нулев и +1-ви порядък?

** б) Какъв е общият брой на максимумите, които се наблюдават след преминаване на светлината през решетката?

КВАНТОВИ СВОЙСТВА НА СВЕТЛИНАТА

Топлинно излъчване и светлинни кванти

Всяко тяло, загрято до определена абсолютна температура T, е източник на **топлинно излъчване** – електромагнитно лъчение в непрекъснат спектрален диапазон. Енергията E, която тялото излъчва за единица време от единица площ на околната му повърхност, се измерва с единица ват върху квадратен метър (W/m^2) и се нарича **интензитет** на топлинното излъчване (по аналогия с величината интензитет на светлината I, която се измерва със същите единици). Интензитетът на топлинното излъчване се дава със закона на Стефан–Болцман

$$E = e\sigma T^4,$$

където величината $\sigma = 5{,}67.10^{-8}\,\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\,.\,\mathrm{K}^4}$ се нарича **константа на Стефан–Болцман**. Безразмерният множител e, който има стойности в интервала 0 – 1, се нарича **коефициент на чернота** и зависи от температурата и свойствата на излъчващата повърхност. За черни на цвят повърхности (например при овъглени предмети) $e \approx 1$. За тела с метална отразяваща повърхност коефициентът на чернота може да е значително по-малък от единица, например $e = 0{,}05 - 0{,}10$. **Абсолютно черно** се нарича хипотетично тяло, което поглъща изцяло падащите върху него лъчения. За абсолютно черно тяло $e = 1$. Максимум в спектъра на излъчване на абсолютно черно тяло се наблюдава при дължина на вълната λ_{max}, която се определя от **закона на Вин**

$$T\lambda_{max} = b,$$

където $b = 2{,}90.10^{-3}$ m.K се нарича константа на Вин.

Светлината се излъчва, разпространява и поглъща на порции, наречени **светлинни кванти** (или **фотони**), с енергия

$$E_{\phi} = h\nu,$$

където ν е честотата на светлината, а $h = 6{,}63.10^{-34}$ J.s се нарича **константа на Планк**. Ако върху метална повърхност пада светлина с енергия на фотоните, по-голяма от отделителната работа A на метала, се наблюдава **външен фотоефект** – избиване на електрони от метала. Максималната скорост v_{max} на отделените електрони се определя от **уравнението на Айнщайн**

$$h\nu = A + \frac{mv_{max}^2}{2}.$$

Максималната кинетична енергия на отделените от катода на фотоклетка електрони се установява експериментално чрез измерване на задържащото напрежение $U_з$ между катода и анода на фотоклетка

$$eU_з = \frac{mv_{max}^2}{2}.$$

Във всички задачи по-долу ще приемем, че константите на Вин, Стефан–Болцман и Планк, както и зарядът и масата на електрона са известни величини.

ПРИМЕРИ

3.33. Колко пъти се увеличава интензитетът на топлинно излъчване на порцеланова чаша, ако след наливане на горещ чай в нея температурата ѝ нараства от 20 °C на 40 °C?

Дадено: $t_1 = 20$ °C, $t_2 = 40$ °C
Да се намери: E_2/E_1
Решение

Преди да приложим закона на Стефан–Болцман, е необходимо да изразим началната и крайната температура в абсолютна температурна скала:

$$T_1 = t_1 + 273 = 293 \text{ K} \quad \text{и} \quad T_2 = t_2 + 273 = 313 \text{ K}.$$

От закона на Стефан–Болцман имаме:

$$E_1 = e_1\sigma T_1^4$$
$$E_2 = e_2\sigma T_2^4,$$

където e_1 и e_2 са излъчвателните способности на порцелана съответно при началната и при крайната температура. Излъчвателната способност на повечето материали, с които се срещаме във всекидневието, не се изменя съществено в зададения температурен интервал (промяната на e обикновено е съпроводена с видимо изменение на цвета на тялото). Следователно, щом в условието не е специално посочено, трябва да приемем, че $e_1 = e_2$. В такъв случай, след като разделим почленно двете равенства, получаваме окончателно

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 \approx 1{,}3.$$

3.34. Детекторът в термометър за дистанционно измерване на температура може да регистрира минимално относително изменение на интензитета на топлинното излъчване на даден предмет $\Delta E/E = 0{,}1$ %. Колко градуса е минималното изменение на нормалната телесна температурата, което може да бъде установено с помощта на такъв термометър?

Дадено: $t = 37$ °C (нормална телесна температура), $\Delta E/E = 0{,}1\ \% = 0{,}001$
Да се намери: ΔT
Решение

Както в предишния пример, изразяваме началната температура в Келвинова скала: $T = t + 273 = 310$ K. Интензитетът на излъчване на тялото при тази температура е

$$E = e\sigma T^4,$$

където e е коефициентът на чернота на кожата. При изменение на температурата с ΔT интензитетът на излъчването нараства с ΔE, така че

$$E + \Delta E = e\sigma(T + \Delta T)^4.$$

След алгебрични преобразования от получените уравнения намираме

$$\Delta T = T\left(\sqrt[4]{1+\frac{\Delta E}{E}} - 1\right) \approx 0{,}077\ \text{K}.$$

Коментар. Четвъртия корен пресмятаме като два последователни квадратни корена: $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$. Ако не разполагаме с калкулатор, който пресмята квадратен корен, можем да вземем предвид, че $\Delta E/E << 1$, и да приложим приблизителното равенство на Бернули $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$. Тогава получаваме значително по-проста формула за изменението на температурата

$$\Delta T \approx \frac{T\Delta E}{4E},$$

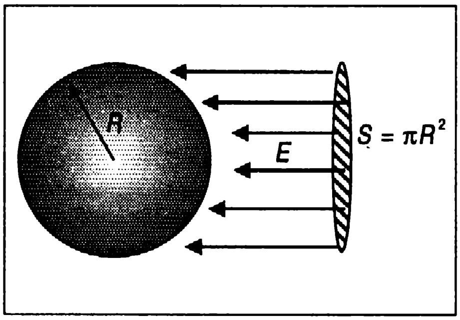
която дава практически същия числен отговор.

3.35. Интензитетът на слънчевото излъчване, което пада върху Земята, е 1380 W/m^2. Оценете средната температура на Земята, ако приемете, че тя излъчва като абсолютно черно тяло.

Дадено: $E = 1380$ W/m^2
Да се намери: T
Решение

Върху земната повърхност пада практически успореден сноп слънчеви лъчи с площ на напречното сечение πR^2, където R е радиусът на Земята (фиг. 3.19). Следователно енергията (количеството топлина), която Земята поглъща за определено време t, е

$$Q_п = E(\pi R^2)t.$$



Фиг. 3.19

Според закона на Стефан–Болцман за същото време Земята излъчва количество топлина

$$Q_п = \sigma T^4 (4\pi R^2)t.$$

При получаване на последното равенство сме приели, че температурата на всички точки от земната повърхност е еднаква и равна на средната температура T. Освен това сме отчели, че излъчването на Земята се осъществява от цялата ѝ повърхност, т.е. от площ

$4\pi R^2$. В състояние, в което средната температура на Земята не се променя, количеството погълнатата енергия е равно на количеството излъчена енергия:

$$Q_и = Q_п,$$

откъдето намираме:

$$T = \sqrt[4]{\frac{E}{4\sigma}} \approx 279\,\text{K} \text{ или } t \approx 6\,°\text{C}.$$

3.36. Оценете температурата върху повърхността на Слънцето, ако приемете, че то излъчва като абсолютно черно тяло. Интензитетът на слънчевото излъчване, който пада върху Земята, е 1380 W/m^2, разстоянието между Земята и Слънцето – 1,5.10^{11} m, а радиусът на Слънцето – 7,1.10^8 m.

Дадено: E = 1380 W/m^2, r = 1,5.10^{11} m, R = 7,1.10^8 m

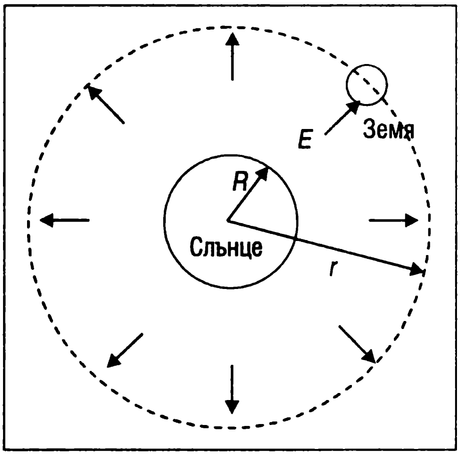
Да се намери: T

Решение

Съгласно със закона на Стефан–Болцман за определено време t от повърхността на Слънцето се излъчва количество енергия:

$$Q_п = \sigma T^4 (4\pi R^2) t,$$

където R е неговият радиус. Нека разгледаме мислена сферична повърхност около Слънцето с радиус r, равен на радиуса на земната орбита (фиг. 3.20). Понеже Слънцето излъчва равномерно във всички посоки, интензитетът на лъчението във всички точки от сферата е равен на E. Следователно през повърхността на сферата за време t преминава количество енергия:



Фиг. 3.20

$$Q_п = E(4\pi r^2)t.$$

Ако приемем, че излъчването на Слънцето не се поглъща в междупланетното пространство, следва, че енергията, излъчена за определено време, е равна на енергията, преминало през сферичната повърхност за същото време:

$$Q_и = Q_п,$$

откъдето получаваме:

$$E = \frac{\sigma T^4 R^2}{r^2}.$$

Това е важна формула, която показва, че интензитетът на излъчването намалява обратнопропорционално на квадрата на разстоянието с отдалечаване от източника – т.нар. закон на Ламберт. В нашия случай полученото съотношение ни позволява да определим температурата върху повърхността на Слънцето:

$$T = \sqrt[4]{\frac{Er^2}{\sigma R^2}} = \sqrt{\frac{r}{R}} \cdot \sqrt[4]{\frac{E}{\sigma}} \approx 5700\,\text{K}.$$

3.37. В термос се намират 2 kg вода с температура 40 °C. Термосът представлява съд с две тънки стени, между които е създаден вакуум. Върху отвора на термоса е поставена запушалка, която не провежда топлина. Намерете след колко време температурата на водата в термоса ще намалее с 1 °C. Температурата на околния въздух е 20 °C, специфичният топлинен капацитет на водата – 4200 J/kg.K, площта на всяка от стените – 0,1 m^2. Приемете, че стените излъчват като абсолютно черни тела.

Дадено: t_1 = 40 °C, t_2 = 20 °C, Δt = 1 °C (ΔT = 1 K), S = 0,1 m^2, m = 2 kg, c = 4200 J/kg.K
Да се намери: τ (времето за изстиване на водата с 1 K)
Решение

Понеже между стените няма газове, които да провеждат топлина (идеален вакуум), топлообменът между тях се осъществява единствено чрез топлинно излъчване. Тъй като стените са много тънки, температура на вътрешната стена практически е еднаква с тази на водата, а на външната – с температурата на околния въздух. Следователно абсолютните температури T_1 и T_2 съответно на вътрешната и на външната стена са

$$T_1 = t_1 + 273 = 313 \text{ K} \quad \text{и} \quad T_2 = t_2 + 273 = 293 \text{ K}.$$

Относителното изменение на абсолютната температурата на водата в търсения интервал от време е много малко и следователно можем да приемем, че абсолютната температура на вътрешната стена е практически постоянна.

За време τ от вътрешната към външната стена се излъчва количество топлина

$$Q_1 = \sigma T_1^4 S\tau,$$

а от външната към вътрешната съответно

$$Q_2 = \sigma T_2^4 S\tau.$$

Разликата между Q_1 и Q_2 е равна на количеството топлина, което водата е загубила при нейното охлаждане

$$Q_1 - Q_2 = mc\Delta T.$$

След като заместим изразите за Q_1 и Q_2, определяме търсеното време

$$\tau = \frac{mc\Delta T}{\sigma(T_1^4 - T_2^4)S} \approx 660 \text{ s} = 10 \text{ min}.$$

Коментар. На практика стените на термосите имат метални отразяващи повърхности с много малък коефициент на чернота. Поради това тяхното топлинното излъчване е значително по-слабо, отколкото това на абсолютно черно тяло. Ето защо реалното време за охлаждане на течността в термоса е по-голямо от пресметнатото по-горе. Точното решение на задачата в случай на отразяващи стени обаче е значително по-сложно, поради което няма да бъде разгледано. Тук ще посочим единствено крайния резултат

$$\tau = \frac{(e_1 + e_2 - e_1 e_2)mc\Delta T}{e_1 e_2 \sigma(T_1^4 - T_2^4)S},$$

където e_1 и e_2 са коефициентите на чернота съответно на вътрешната и на външната стена. Ако приемем, че $e_1 = e_2 = 0{,}1$, ще получим $\tau \approx 200$ min, т.е. същото изменение на температурата ще настъпи за повече от 3 часа.

3.38. Намерете температурата на нажежаемата нишка в лампа с мощност 100 W. Колко фотона за една секунда излъчва лампата? Жичката има дължина 10 cm и диаметър 0,1 mm. Приемете, че жичката излъчва като абсолютно черно тяло.

Дадено: $P = 100$ W, $l = 0{,}1$ m, $d = 1.10^{-4}$ m, $t = 1$ s
Да се намери: T, N
Решение

Мощността P на лампата е енергията, която тя излъчва за единица време. Ако приемем, че жичката е абсолютно черно тяло ($e = 1$), мощността на лампата може да бъде определена от закона на Стефан–Болцман

$$P = ES = \sigma T^4 \pi d l,$$

при което разглеждаме жичката като цилиндър с площ на околната повърхност $S = \pi dl$. Така намираме температурата на жичката

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma \pi d l}} \approx 2700\,\text{K}.$$

От закона на Вин определяме дължината на вълната λ_{max}, при която излъчването на жичката има максимален интензитет

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} \approx 1{,}1.10^{-6}\,\text{m}.$$

За да оценим броя на излъчените фотони, ще приемем, че жичката излъчва фотони с еднаква дължина на вълната – λ_{max}, и съответно с еднаква енергия

$$E_{ф} = h\nu = \frac{hc}{\lambda_{max}},$$

където $c = 3.10^8$ m/s е скоростта на светлината във вакуум и сме отчели връзката между честотата ν на фотона и неговата дължина на вълната λ_{max}: $\nu\lambda_{max} = c$. За време t жичката излъчва енергия Pt. Следователно броят на излъчените фотони за това време е

$$N = \frac{Pt}{E_{ф}} = \frac{P\lambda_{max}t}{hc} \approx 5{,}4.10^{20}.$$

3.39. При облъчване на платиновия катод на фотоклетка се отделят електрони с максимална кинетична енергия $1{,}44.10^{-19}$ J. Определете дължината на вълната на лъчението, ако червената граница на фотоефекта за платината съответства на 234 nm.

Упътване. Червена граница на фотоефекта се нарича минималната честота ν_{min} (или максималната дължина λ_{max}) на светлинната вълна, при която настъпва фотоефект.

Дадено: $E_{к\,max} = 1{,}44.10^{-19}$ J, $\lambda_{max} = 234$ nm
Да се намери: λ
Решение

Червената граница на фотоефекта съответства на енергия на фотона, която е равна на отделителната работа за дадения материал

$$A = \frac{hc}{\lambda_{max}}.$$

От уравнението на Айнщайн, като вземем предвид, че $E_{к,max} = \dfrac{mv_{max}^2}{2}$, получаваме

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda_{max}} + E_{к,max}.$$

Изразяваме честотата на светлината като $\nu = c/\lambda$ и след алгебрични преобразования получаваме окончателно

$$\lambda = \frac{hc\lambda_{max}}{hc + E_{к,\,max}\lambda_{max}} \approx 2{,}0 \cdot 10^{-7}\,\text{m} = 200\,\text{nm}.$$

3.40. Лазерен сноп с дължина на вълната 500 nm и мощност 100 mW пада върху катода на фотоклетка. Намерете максималната скорост на отделените фотоелектрони, ако отделителната работа на катода е 2 eV. Какъв е максималният ток, който може да тече през фотоклетката при тази мощност на лазера?

Упътване. Мощността на лазерния сноп е количеството енергия, което той пренася за единица време.

Дадено: $P = 100$ mW, $\lambda = 500$ nm, $A = 2$ eV
Да се намери: v_{max}, I_{max}
Решение

Изразяваме енергията на фотоните чрез дължината на светлинната вълна

$$E_ф = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

От уравнението на Айнщайн имаме

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - A$$

или $$v_{max} = \sqrt{\frac{2(hc - A\lambda)}{m\lambda}} \approx 4{,}2.10^5 \text{m/s}.$$

За да се получи правилен числен отговор, е необходимо всички величини да бъдат изразени в SI. За целта използваме факта, че 1 eV = $1{,}6.10^{-19}$ J и 1 nm = 10^{-9} m.

При зададената мощност на лазера през фотоклетката ще протича максимален ток, ако са изпълнени две условия:

- Всички фотони, попаднали върху катода, се поглъщат.
- Всеки погълнат фотон води до отделяне на електрон от катода.

Съгласно с резултата в пример 3.37 броят N на падналите фотони за определено време t се дава с израза

$$N = \frac{P\lambda t}{hc}.$$

Понеже приемаме, че всеки паднал фотон води до отделяне на електрон, максималният електричен заряд, преминал за същото време през фотоклетката, е

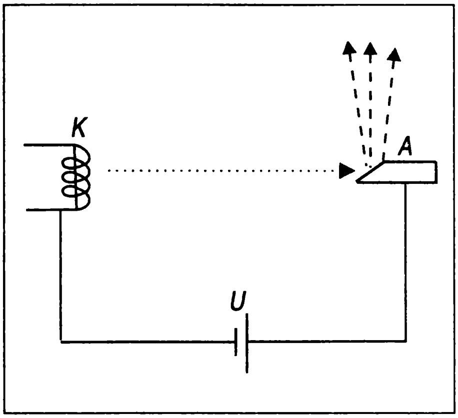
$$q_{max} = Ne = \frac{Pe\lambda t}{hc},$$

където $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C е елементарният електричен заряд. По определение големината на тока е равна на количеството заряд, което преминава през веригата за единица време. Оттук намираме максималния ток

$$I_{max} = \frac{q_{max}}{t} = \frac{Pe\lambda}{hc} \approx 0{,}04 \text{ A}.$$

3.41. В рентгеновите тръби електроните се отделят от силно нагрят катод K, ускоряват се от високо напрежение U и попадат върху метален анод A (фиг. 3.21). При спиране на електроните в анода се излъчват рентгенови лъчи в голям интервал от дължини на вълната. Оказва се обаче, че при дадено ускоряващо напрежение съществува определена минимална дължина λ_{min} на вълната на лъчението. Обяснете това явление и пресметнете λ_{min} при ускоряващо напрежение 100 000 V.

Дадено: U = 100 000 V
Да се намери: λ_{min}
Решение



Фиг. 3.21

След като се ускорят в електричното поле на тръбата, електроните попадат върху анода с кинетични енергии eU, където e е елементарният електричен заряд. При спиране в анода енергията на даден електрон се преобразува частично в количество топлина Q, което води до загряване на анода, и частично – в енергия $h\nu$ на излъчения рентгенов квант. От закона за запазване на енергията намираме

$$eU = Q + h\nu.$$

Честотата на излъчения фотон е най-голяма тогава, когато кинетичната енергия на електрона се преобразува изцяло в енергия на излъчения квант (Q = 0)

$$h\nu_{max} = eU.$$

Понеже честотата е обратнопропорционална на дължината на вълната, на излъчване с максимална честота ν_{max} съответства минимална дължина λ_{min} на вълната, такава, че

$$\lambda_{min} = \frac{c}{\nu_{max}} = \frac{hc}{eU}.$$

При зададената стойност на ускоряващото напрежение намираме $\lambda_{min} \approx 1{,}25 \cdot 10^{-11}$ m = 0,0125 nm.

Задачи

3.42. Всяко тяло, независимо от неговата температура, губи топлина посредством излъчване. Защо тогава телата, които се намират около вас в стаята, не се охлаждат непрекъснато, а се намират на практика при постоянна температура?

3.43. Защо топли ястия често се пренасят, завити в метално фолио?

3.44. С колко процента нараства интензитетът на топлинното излъчване на дадено тяло, ако неговата абсолютна температура се увеличи с 1 %?

3.45. Плътно стоманено кълбо с радиус 0,1 m и температура 300 K се намира във вакуум, далече от други загрети тела. След колко време температурата на кълбото ще намалее с 1 K? Плътността на стоманата е 7800 kg/m^3, специфичният ѝ топлинен капацитет – 450 J/kg.K, а коефициентът на чернота на повърхността на кълбото – 0,05.

3.46. Оценете какво количество топлина губи човешкото тяло чрез топлинно излъчване в продължение на едно денонощие. Приемете, че телесната температура е 37 °C, а температурата на околната среда – 25 °C. Площта на тялото е около 2 m^2. Приемете, че кожата излъчва като абсолютно черно тяло.

3.47. Максимумът в спектъра на излъчване на Слънцето се намира около λ_{max} = 500 nm. Оценете температурата на повърхността на Слънцето, ако приемете, че то излъчва като абсолютно черно тяло. Сравнете резултата с получения в пример 3.36 и коментирайте евентуалните разлики.

** **3.48.** Космическа сонда, предназначена за изследване на Слънцето, има сферичен защитен слой, който позволява уредите в сондата да работят нормално при температура на слоя до 1000 K. На какво минимално разстояние от повърхността на Слънцето може да обикаля сондата? Приемете, че температурата на слънчевата повърхност е 6000 K. Радиусът на Слънцето е $7{,}1 \cdot 10^8$ m.

Упътване. Разгледайте внимателно решенията на примерите 3.35 и 3.36.

3.49. Средно колко фотона излъчва за една секунда сферична частичка от сажди с радиус 0,1 mm, загрята до температура 200 °C?

3.50. Защо фотографските филми се проявяват на червена светлина без опасност да бъдат осветени?

3.51. Отделителната работа на калия е 2,26 eV. Ще предизвика ли фотоефект светлината на хелий-неонов лазер с дължина на вълната 633 nm, облъчвайки калиев фотокатод?

3.52. При облъчване със светлина от аргонов лазер (λ = 514 nm) задържащото напрежение на фотоклетка е 0,61 V. Пресметнете отделителната работа на катода на фотоклетката в електронволти, както и червената граница на фотоефекта.

3.53. Максималният ток, който протича през фотоклетка при облъчване с лазерен сноп с дължина на вълната 488 nm, е $5{,}0 \cdot 10^{-4}$ A. Намерете мощността на лазерното лъчение, ако приемете, че един на всеки 10 фотона води до избиване на електрон от фотокатода.

4. ДВИЖЕНИЕ И ЕНЕРГИЯ

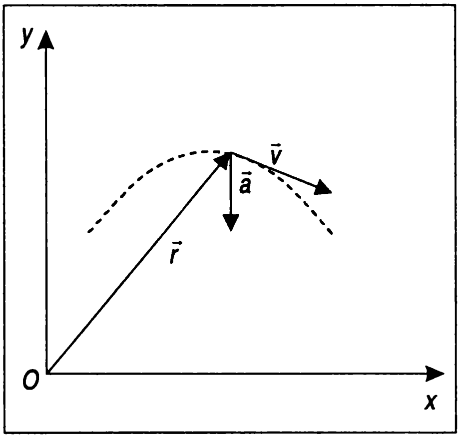
КИНЕМАТИКА НА МАТЕРИАЛНА ТОЧКА

Движение с постоянно ускорение

Във всеки момент движението на материална точка спрямо определена координатна система в равнината може да бъде характеризирано с три векторни величини: радиус-вектор $\vec{r}$, скорост $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ (фиг. 4.1). Казваме, че движението е с постоянно ускорение, или **равнопроменливо**, ако ускорението на материалната точка е постоянно както по големина, така и по посока, т.е. векторът на ускорението не се променя с времето

$$\vec{a} = \text{const}.$$

В този случай векторът $\vec{v}(t)$ на скоростта на материалната точка в произволен момент t може да бъде изразен чрез вектора $\vec{v}_0$ на скоростта в началния момент и вектора на ускорението ѝ



Фиг. 4.1

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

Това съотношение се нарича **закон за скоростта** при равнопроменливо движение.

За да се определи радиус-векторът $\vec{r}(t)$ в произволен момент t, е необходимо да се познава радиус-векторът $\vec{r}_0$ в началния момент, както и векторът на началната скорост $\vec{v}_0$. **Законът за движението** с постоянно ускорение има вида

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

На практика законът за скоростта и законът за движение се представят като система от числови равенства между **компонентите** x и y на радиус-вектора, v_x и v_y на скоростта и a_x и a_y на ускорението:

закони за скоростта:

по x: $v_x = v_{0x} + a_x t$

по y: $v_y = v_{0y} + a_y t;$

закони за движението:

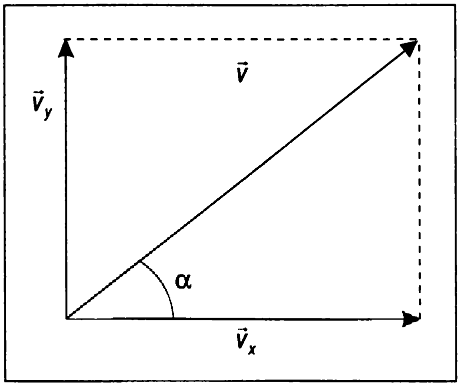
по x: $x(t) = x_0 + v_{0x} t + \dfrac{a_x t^2}{2}$

по y: $y(t) = y_0 + v_{0y} t + \dfrac{a_y t^2}{2}.$

За да определим компонентите на един вектор, например $\vec{v}$, е необходимо да познаваме неговата големина v и ъгъла α, който той сключва с оста x (фиг. 4.2):

$v_x = v\cos\alpha,$

$v_y = v\sin\alpha.$



Фиг. 4.2

Материалната точка се движи равнопроменливо, когато върху нея действа постоянна по големина и по посока сила. Ако движението се извършва под действието на силата на тежестта, ускорението на точката е равно на земното ускорение ($\vec{a} = \vec{g}$), т.е. насочено е вертикално надолу и големината му е $a = g = 9{,}8$ m/s^2. В примерите и задачите по-долу ще пренебрегваме силата на съпротивление на въздуха, освен ако условието не изисква тя да бъде отчетена.

При решаване на задачи, отнасящи се до равнопроменливо движение, най-напред е необходимо да изберем координатна система. Правим подходящ чертеж, на който изобразяваме координатните оси, вектора на началната скорост и вектора на ускорението на материалната точка. Определяме координатите x_0 и y_0 на точката в началния момент, компонентите на началната ѝ скорост и компонентите на нейното ускорение. Особено внимание трябва да обърнем на **знаците** „+“ или „–“ пред компонентите на векторите спрямо избраната координатна система. След като запишем законите за скоростта и за движението по x и по y, анализираме кои от участващите в тях величини са дадени в условието и кои трябва да бъдат определени. Желателно е крайният отговор да бъде изразен както в параметричен вид, така и като число. В задачи, в които е необходимо да определим неизвестен ъгъл, можем да използваме калкулатор или тригонометрични таблици.

ПРИМЕРИ

4.1. Топка, хвърлена вертикално нагоре от земната повърхност, преминава покрай върха на стълб два пъти – в моментите $t_1 = 1$ s и $t_2 = 3$ s след хвърлянето. Намерете:

а) височината на стълба h и началната скорост v_0 на топката;

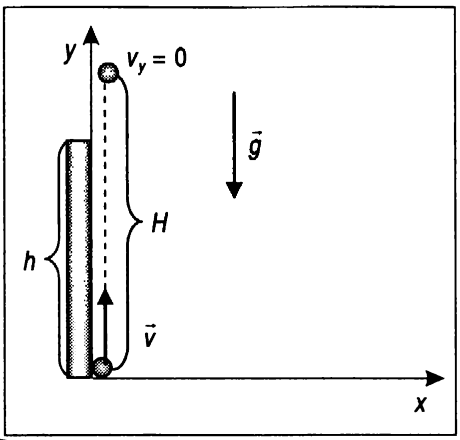
б) максималната височина H, на която се издига топката;

г) общото време $t_п$ на полета на топката.

Дадено: $t_1 = 1$ s, $t_2 = 3$ s, $g = 9{,}8$ m/s^2

Търси се: h, v_0, H, $t_п$

Решение



Фиг. 4.3

Избираме ос x, ориентирана в хоризонтална посока, и ос y, насочена вертикално нагоре (фиг. 4.3). Тъй като топката се движи по вертикална права, изразяваме компонентите на началната ѝ скорост и на земното ускорение само по оста y:

$$v_{0y} = v_0,$$
$$a_y = g_y = -g.$$

Обърнете внимание на знака „–" пред компонентата на земното ускорение. Той отчита факта, че векторът на земното ускорение има посока, противоположна на оста y. Законите за скоростта и за движението по оста y съответно имат вида

$$v_y = v_0 - gt$$

и $$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

като сме взели предвид, че топката е хвърлена от земната повърхност ($y_0 = 0$).

а) В моментите, когато топката преминава покрай върха на стълба, е изпълнено равенството: $y = h$. Следователно моментите t_1 и t_2 са корени на следното квадратно уравнение:

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$
$$gt^2 - 2v_0 t + 2h = 0.$$

Началната скорост на топката и височината на стълба можем да определим, като използваме формулите на Виет за корените на квадратното уравнение

$$t_1 + t_2 = \frac{2v_0}{g} \quad \text{и} \quad t_1 t_2 = \frac{2h}{g},$$

от които намираме окончателно:

$$h = \frac{g t_1 t_2}{2} = 14{,}7\ \text{m},$$
$$v_0 = \frac{g(t_1 + t_2)}{2} = 19{,}6\ \text{m/s}.$$

б) Топката се издига дотогава, докато $v_y > 0$. Следователно в момента t_0, в който топката достига максимална височина, $v_y = 0$. От това условие и от резултатите, получени в т. а), определяме

$$t_0 = \frac{v_0}{g} = \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

Максималната височина H е равна на y-координатата на топката в момента t_0

$$H = y(t_0) = \frac{g(t_1 + t_2)^2}{8} = 19{,}6\ \text{m}.$$

в) В момента $t_п$ топката пада върху земята и нейната координата е $y(t_п) = 0$. От това условие определяме

$$t_п = \frac{2v_0}{g} = t_1 + t_2 = 4\ \text{s}.$$

4.2. Тяло е изстреляно от земната повърхност с начална скорост v_0, насочена под ъгъл α спрямо хоризонта. Изразете максималната височина на полета H, времето $t_п$ и далечината L на полета чрез v_0, α и земното ускорение g.

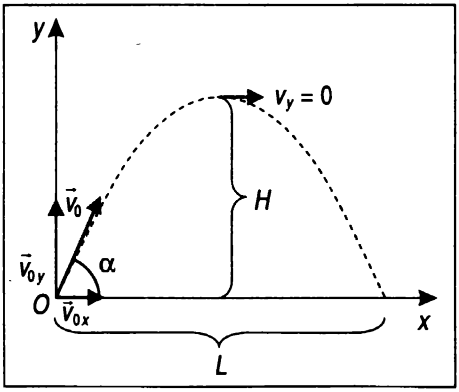
Дадено: v_0, α, g

Търси се: H, $t_п$, L

Решение

Избираме координатна система с ос x, ориентирана в хоризонтална посока, ос y, насочена вертикално нагоре, и начало O, разположено в точката на изстрелване на тялото (фиг. 4.4). Спрямо тази координатна система началните координати на тялото са

$x_0 = 0,$
$y_0 = 0.$



Фиг. 4.4

Изобразяваме на същия чертеж векторите $\vec{v}_0$ на началната скорост и $\vec{g}$ на земното ускорение и определяме техните компоненти спрямо осите x и y:

- компоненти на началната скорост:
  $v_{0x} = v_0\cos\alpha,$
  $v_{0y} = v_0\sin\alpha,$
- компоненти на земното ускорение:
  $g_x = 0,$
  $g_y = -g.$

Обърнете внимание, че компонентата на $\vec{g}$ по y е отрицателна, защото посоката на земното ускорение е противоположна на тази координатна ос. Записваме законите за скоростта и законите за движение в направление на осите x и y:

- Закони за скоростта:
  по x: $v_x = v_0\cos\alpha,$
  по y: $v_y = v_0\sin\alpha - gt.$
- Закони за движение:
  по x: $x(t) = (v_0\cos\alpha)t$
  по y: $y(t) = (v_0\sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2}.$

Както виждаме, движението в направление на остa x е равномерно с постоянна скорост $v_0\cos\alpha$, защото хоризонталната компонента на земното ускорение е нула. В направление на оста y обаче движението е равнопроменливо. В началото, докато тялото се издига, вертикалната компонента на скоростта е положителна: $v_y > 0$. Тя обаче намалява по абсолютна стойност и в момента, когато тялото достига максимална височина, имаме: $v_y = 0$. Следователно моментът t_0 за достигане на максимална височина се определя от уравнението

$$v_0\sin\alpha - gt_0 = 0$$

или $$t_0 = \frac{v_0\sin\alpha}{g}.$$

Максималната височина H е равна на координатата y в момента t_0

$$H = y(t_0) = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}. \qquad (4.1)$$

За да определим времето $t_п$ на полета, трябва да вземем предвид, че в момента, когато тялото достига земната повърхност, неговата y-координата е нула

$$y(t) = (v_0\sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2} = 0$$

Това уравнение има два корена:

$$t_1 = 0,$$

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Коренът t_1 съответства на момента на изстрелването, когато тялото се отделя от земната повърхност, а коренът t_2 – на момента, когато тялото достига земната повърхност. Тогава времето на полета $t_п$ е:

$$(4.2) \quad t_п = t_2 - t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Далечината L на полета се определя от x-координатата на тялото в момента на приземяването:

$$(4.3) \quad L = x(t_п) = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g}.$$

Като използваме тригонометричното тъждество: $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin(2\alpha)$, получаваме следния окончателен израз за далечината на полета:

$$(4.4) \quad L = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}.$$

Коментар. 1. От формула 4.2 виждаме, че $t_п = 2t_0$, т.е. времето на полета е два пъти по-голямо от времето за достигане на максимална височина. Оттук следва, че времето за издигане от земната повърхност до максимална височина е равно на времето, за което тялото се спуска от най-високата точка до земната повърхност.

2. От формула 4.3 и тъждествата:

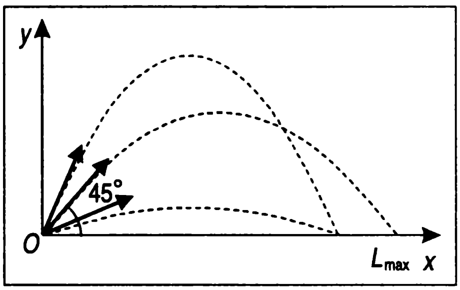
$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,$$

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha,$$

следва, че далечината на полета при зададена начална скорост и ъгъл α е еднаква с тази при ъгъл на изстрелване $90° - \alpha$. Това означава, че когато $\alpha \neq 45°$, тялото може да стигне до крайната точка на своя полет по две различни траектории (фиг. 4.5).

3. Когато $\alpha = 45°$, при зададена начална скорост тялото може да стигне до крайната точка по една-единствена траектория. От формула 4.4 следва, че при този ъгъл на изстрелване далечината на полета е максимална, защото $\sin(2\alpha) = 1$. Така можем да получим максималната далечина L_{max} на полета:

$$L_{max} = \frac{v_0^2}{g}.$$



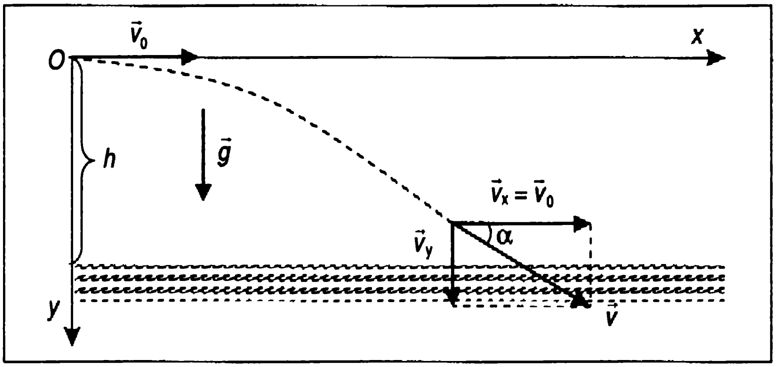
Фиг. 4.5

4.3. За да може при хвърляне камък да отскочи от гладка водна повърхност, е необходимо скоростта му в момента на удара да сключва ъгъл спрямо хоризонта, по-малък от 30°. С каква минимална начална скорост трябва да бъде хвърлен камък в хоризонтално направление от височина 1 m над водната повърхност така, че да може да отскочи от водата? С каква скорост камъкът ще достигне повърхността на водата?

Дадено: $h = 1$ m, $\alpha_{min} = 30°$, $g = 9{,}8$ m/s^2
Търси се: v_{min}, v
Решение

Избираме координатна система с ос x, ориентирана в хоризонтална посока – в посоката на началната скорост на камъка. Удобно е да изберем оста y, насочена вертикално надолу, защото тогава y-координатата на камъка и y-компонентата на неговата скорост ще се изразяват с положителни числа (фиг. 4.6). Началото O на координатната система съвпада с точката на изстрелване на камъка. Началните координати на камъка са

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0.$$



Фиг. 4.6

Изобразяваме на чертежа векторите $\vec{v}_0$ и $\vec{g}$. Техните компоненти в тази координатна система съответно са:

$$v_{0x} = v_0,$$
$$v_{0y} = 0,$$
$$g_x = 0,$$
$$g_y = g.$$

Записваме законите за скоростта:

по x: $v_x = v_0$,
по y: $v_y = gt$.

Следователно камъкът се движи равномерно в хоризонтално направление и равноускорително – във вертикално. Съответните закони за движение са:

по x: $x(t) = v_0 t$,

по y: $y(t) = \dfrac{gt^2}{2}$.

В момента t_0, в който камъкът достига водната повърхност, неговата y-координата е $y(t_0) = h$ (вж. фиг. 4.6), откъдето определяме времето за полет на камъка

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Изразяваме компонентите на скоростта в момента на удара на камъка с водната повърхност:

$$v_x = v_0,$$
$$v_y = v_y(t_0) = \sqrt{2gh}.$$

От фиг. 4.6 следва, че камъкът се удря във водната повърхност под ъгъл α такъв, че

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0}.$$

За да може камъкът да отскочи, е необходимо $\alpha \leq 30°$, откъдето следва, че

$$\operatorname{tg}\alpha \leq \operatorname{tg}30°$$

или $$\frac{\sqrt{2gh}}{v_0} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Най-малката начална скорост $v_{0_{\min}}$, при която е изпълнено това условие, е

$$v_{0_{\min}} = \sqrt{6gh} \approx 7{,}7\ \mathrm{m/s}.$$

Скоростта, с която камъкът достига водната повърхност, се определя по теоремата на Питагор

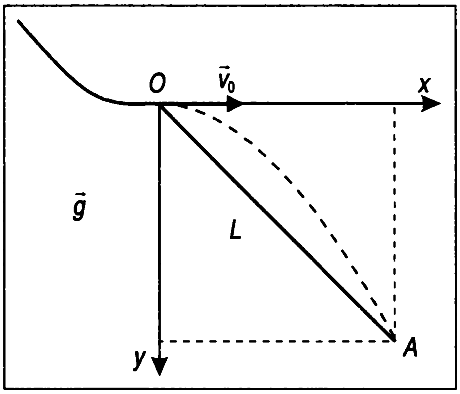
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{8gh} \approx 8{,}9\ \mathrm{m/s}.$$

Коментар. От получените резултати следва, че колкото от по-ниско хвърляте камъка, толкова по-малка начална скорост трябва да му придадете, за да може той да отскочи от водната повърхност. Този факт обяснява защо, когато приклекнете или се наведете в момента на хвърлянето, камъкът отскача по-лесно (проверете това експериментално).

4.4. Скиор достига писта за ски скокове със скорост 15 m/s, насочена хоризонтално. Пистата е наклонена под ъгъл 45° спрямо хоризонта (фиг. 4.7). Намерете далечината на полета на скиора.

Дадено: $v_0 = 15$ m/s, $\alpha = 45°$, $g = 9{,}8$ m/s^2
Да се намери: L
Решение

Обикновено в задачите от механика координатната система се избира така, че уравненията за движение на тялото да се записват по най-прост начин. В редица случаи обаче този критерий не води до еднозначен избор. С този пример ще илюстрираме как един и същ резултат може да бъде получен по два различни начина в зависимост от използваната координатна система.



Фиг. 4.7

I начин

Избираме координатна система така, както е показано на фиг. 4.7 – оста x е ориентирана в хоризонтална посока, а оста y – вертикално надолу. Координатното начало O съвпада с точката, от която излита скиорът. Компонентите на началната скорост са:

$$v_{0x} = v_0,\ v_{0y} = 0,$$

а на земното ускорение –

$$g_x = 0,\ g_y = g.$$

Следователно уравненията за движение на скиора спрямо тази координатна система имат вида:

$$x(t) = v_0 t,$$

$$y(t) = \frac{gt^2}{2}.$$

Ако изключим времето t от закона за движение по x и го заместим в закона за движение по y, получаваме уравнение, което описва траекторията на скиора

$$y(x) = \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Понеже пистата е наклонена под еднакви ъгли 45° спрямо осите x и y, за координатите на точката A, в която се приземява скиорът, е изпълнено равенството

$$x = y.$$

От това условие и като използваме уравнението на траекторията, получаваме, че за т. A

$$x = \frac{gx^2}{2v_0^2},$$

откъдето $x = y = \dfrac{2v_0^2}{g}$.

Далечината на полета е равна на разстоянието между точката O на излитане и точката A на приземяване, което определяме от теоремата на Питагор

$$L = OA = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2\sqrt{2}v_0^2}{g} \approx 65\,\text{m}.$$

II начин

Избираме координатна система с ос x, насочена успоредно на пистата, и ос y – перпендикулярно спрямо пистата (фиг. 4.8). Компонентите на началната скорост са:

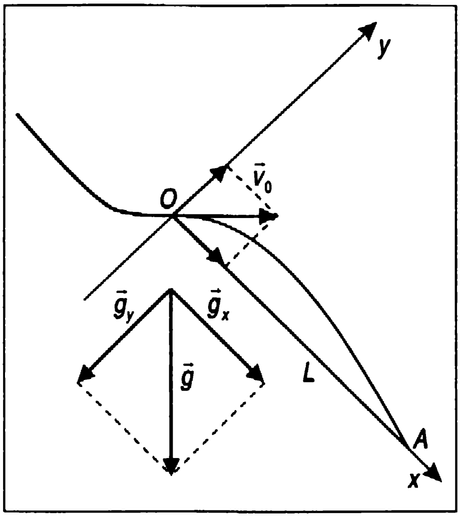
$$v_{0x} = v_0 \cos 45° = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

и $$v_{0y} = v_0 \sin 45° = \frac{v_0}{\sqrt{2}},$$

а компонентите на земното ускорение:

$$g_x = g \sin 45° = \frac{g}{\sqrt{2}}$$

и $$g_y = -g \cos 45° = -\frac{g}{\sqrt{2}}.$$



Фиг. 4.8

Спрямо тази координатна система скиорът извършва равнопроменливи движения в направление и на двете координатни оси:

по x: $$x(t) = \frac{v_0 t}{\sqrt{2}} + \frac{gt^2}{2\sqrt{2}},$$

по y: $$y(t) = \frac{v_0 t}{\sqrt{2}} - \frac{gt^2}{2\sqrt{2}}.$$

В случая е по-сложно да изключим времето t и да получим уравнението на траекторията спрямо тази координатна система. Вместо това обаче можем да определим момента $t_п$ на приземяване, за който е изпълнено условието

$$y(t_п) = 0,$$

или $$t_п = \frac{2v_0}{g}.$$

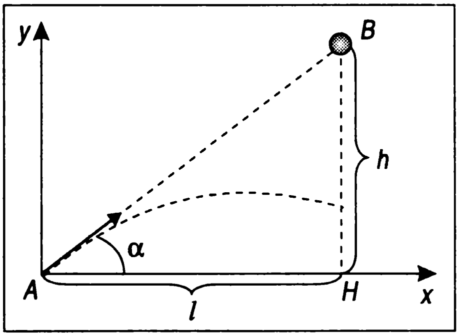
Далечината на полета в тази координатна система се изразява чрез x-координатата на скиора в момента на приземяване

$$L = x(t_п) = \frac{2\sqrt{2}v_0^2}{g} \approx 65\,\text{m}.$$

Както виждаме, полученият резултат е еднакъв с този, получен при първия избор на координатна система.

4.5. От лък, разположен в т. A върху земната повърхност, е изстреляна стрела. В същия момент от т. B, намираща се на височина h и на разстояние l в хоризонтално направление спрямо т. A, е пусната да пада с нулева начална скорост ябълка (фиг. 4.9). Под какъв ъгъл спрямо хоризонта трябва да бъде изстреляна стрелата така, че да уцели падащата ябълка?

Дадено: h, l
Да се намери: α
Решение



Фиг. 4.9

Избираме координатна система с начало, разположено в т. A, както е показано на фиг. 4.9. Означаваме с x_1 и y_1 координатите на стрелата. Като следваме решението на пример 4.2, намираме закона за движение на стрелата:

по x: $$x_1(t) = (v_0 \cos\alpha)t,$$

по y: $$y_1(t) = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}.$$

Координатите на ябълката в началния момент са

$$x_{20} = l \text{ и } y_{20} = h.$$

Понеже ябълката пада по вертикална права, нейната x-координата не се променя с времето

$$x_2(t) = l.$$

В направление на оста y ябълката пада свободно с нулева начална скорост

$$y_2(t) = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Стрелата ще уцели ябълката, ако в определен момент t те попаднат в една и съща точка на пространството. Математически това означава, че в този момент стават еднакви както x-координатите на стрелата и на ябълката, така и техните y-координати:

$$x_1(t) = x_2(t),$$
$$y_1(t) = y_2(t).$$

От тези равенства и от законите да движение на ябълката и на стрелата следва, че трябва да са изпълнени едновременно две условия:

$$(v_0 \cos\alpha)t = l,$$

$$(v_0 \sin\alpha)t = h.$$

Като разделим почленно двете уравнения, намираме, че стрелата ще уцели ябълката при ъгъл на изстрелване α такъв, че:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{h}{l}.$$

От правоъгълния триъгълник ABH на фиг. 4.9 се вижда, че $\frac{BH}{AH} = \frac{h}{l} = \mathrm{tg}(\sphericalangle BAH)$, т.е. $\sphericalangle BAH = \alpha$. Следователно стрелата трябва да бъде насочена към точката, от която започва да пада ябълката.

4.6. Топка за тенис с маса 100 g е изстреляна с начална скорост 20 m/s под ъгъл 15° спрямо хоризонта. По време на полета върху топката действа постоянна сила на съпротивление на въздуха, която е ориентирана в хоризонтална посока и големината ѝ е 0,2 N. Пресметнете далечината на полета на топката. С колко метра пресметнатата стойност е по-малка от далечината, на която би се приземила топката, ако нямаше сила на съпротивление?

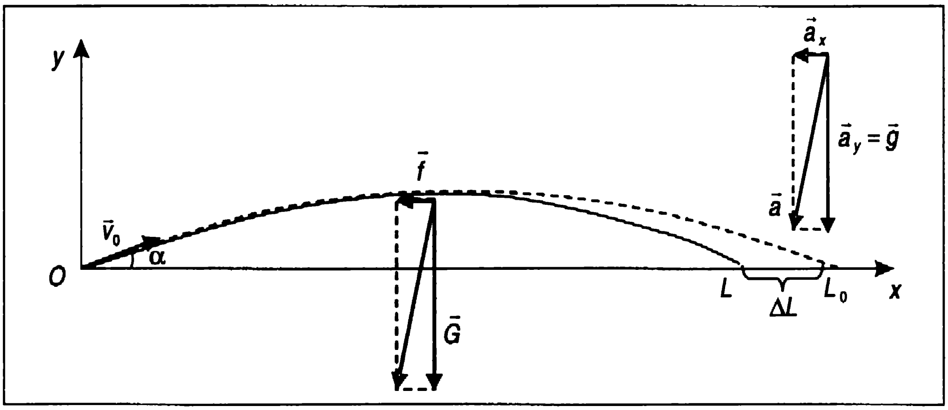
Дадено: $m = 0{,}1$ kg, $v_0 = 20$ m/s, $\alpha = 15°$, $f = 0{,}2$ N, $g = 9{,}8$ m/s^2

Търси се: L, ΔL

Решение

Ускорението $\vec{a}$ на топката се определя от едновременното действие на две сили – силата на тежестта $\vec{G} = m\vec{g}$ и силата $\vec{f}$ на съпротивление на въздуха (фиг. 4.10). От II принцип на Нютон имаме

$$\vec{a} = \frac{\vec{G} + \vec{f}}{m} = \vec{g} + \frac{\vec{f}}{m}.$$



Фиг. 4.10

След като проектираме вектора на ускорението върху осите x и y, намираме неговите компоненти:

$$a_x = -\frac{f}{m},$$

$$a_y = -g.$$

Следователно законите за движение на топката имат вида:

по x: $$x = (v_0 \cos\alpha)t - \frac{f}{2m}t^2,$$

по y: $$y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}.$$

Момента $t_п$ на приземяване определяме от условието $y(t_п) = 0$, т.е. $t_п = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. Далечината на полета е равна на x-координатата на топката в момента, в който тя достига земната повърхност

$$L = x(t_п) = \frac{2v_0^2 \sin\alpha}{g}\left(\cos\alpha - \frac{f}{mg}\sin\alpha\right).$$

Като вземем предвид, че $\sin 15° \approx 0{,}259$ и $\cos 15° \approx 0{,}966$, и като заместим числените данни от условието, пресмятаме

$$L \approx 19{,}3\ \text{m}.$$

Ако върху топчето не действаше сила на съпротивление ($f = 0$), то щеше да падне на разстояние L_0, което се дава с израза

$$L_0 = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g},$$

откъдето намираме с колко намалява далечината на полета вследствие на съпротивлението на въздуха

$$\Delta L = L_0 - L = \frac{2v_0^2 f \sin^2\alpha}{mg^2} \approx 1{,}1\ \text{m}.$$

Коментар. В тази задача са направени две съществени приближения – прието е, че големината на силата на съпротивление е постоянна и че нейната посока е хоризонтална. Те обаче могат да бъдат обосновани при конкретните данни от условието.

Както знаем, посоката на силата на съпротивление във всеки момент е насочена противоположно спрямо скоростта на тялото. В нашия случай обаче топката е изстреляна под сравнително малък ъгъл спрямо хоризонта и следователно вертикалната компонента на силата $\vec{f}$ е значително по-малка от нейната хоризонтална компонента, т.е. можем да приемем, че силата на съпротивление е насочена приблизително в хоризонтално направление. От друга страна, известно е, че големината на силата на съпротивление е пропорционална на квадрата на скоростта на тялото. Поради това че топката е изстреляна под малък ъгъл, тя се издига на височина, която е малка в сравнение с далечината на полета. Намаляването на скоростта на топката в резултат от нейното издигане също е сравнително малко. Следователно можем да приемем, че големината на силата на съпротивление практически не се променя.

Задачи

4.7. Ракета-модел е изстреляна вертикално нагоре с начална скорост 30 m/s. Намерете:

а) максималната височина, на която се издига ракетата; б) времето от изстрелването на ракетата до нейното падане; в) височината и моментите от време, в които големината на скоростта на ракетата е 1/2 от началната.

4.8. Топка за тенис се намира на разстояние L = 5 m от вертикална стена. На топката е придадена начална скорост v_1 = 5 m/s, насочена перпендикулярно спрямо стената. а) С каква скорост v топката ще достигне стената? б) При каква друга големина v_2 на началната скорост топката ще достигне стената със същата крайна скорост v? в) При каква големина v_0 на началната скорост топката ще достигне стената с най-малка крайна скорост?

4.9. Тяло е изстреляно под ъгъл 45° спрямо хоризонта. Намерете отношението H/L на максималната височина на издигане на тялото към далечината на полета му. Под какъв ъгъл спрямо хоризонта трябва да бъде изстреляно тяло така, че далечината на полета му да бъде равна на максималната му височина на издигане?

4.10. Колко време продължава полетът на снаряд, изстрелян със скорост 400 m/s под ъгъл 45° спрямо хоризонта?

4.11. Когато снаряд е изстрелян под ъгъл 30° спрямо хоризонта, той пада на 10 km от точката на изстрелване. На какво разстояние ще падне снарядът, ако е изстрелян със същата начална скорост под ъгъл: а) 60°; б) 45° спрямо хоризонта?

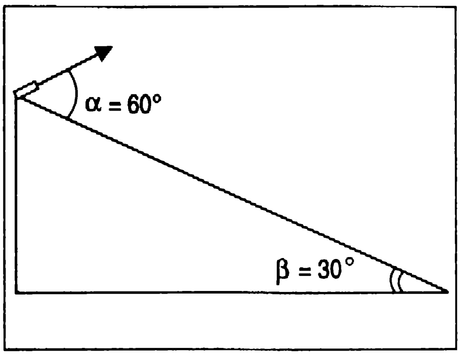
4.12. Топка за тенис отскача със скорост 10 m/s от тенис ракета. В най-високата точка на траекторията си топката има скорост 8 m/s. Каква е максималната височина, на която се издига топката?

4.13. Под какъв ъгъл спрямо хоризонта е излетяла бейзболна топка след удар с бухалка, ако началната й скорост е два пъти по-голяма от скоростта в най-високата точка от нейната траектория?

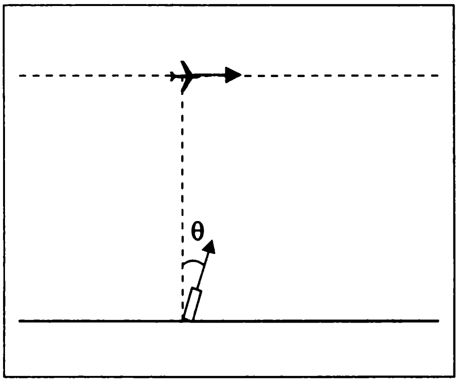
4.14. По време на снимки каскадьор се засилва с мотоциклет по хоризонтална рампа, разположена на височина 3 m над земната повърхност. Какво разстояние в хоризонтално направление изминава мотоциклетът, ако в момента на скока скоростта му е 100 km/h? Под какъв ъгъл спрямо земната повърхност е насочена скоростта на мотоциклета в момента, когато той се приземява?

4.15. Оръдие стреля под ъгъл 60° спрямо планински склон, сключващ ъгъл 30° с хоризонта (фиг. 4.11). На какво разстояние от оръдието ще падне снарядът, ако скоростта му в момента на изстрела е 400 m/s? Решете задачата по два начина, като използвате различни координатни системи.

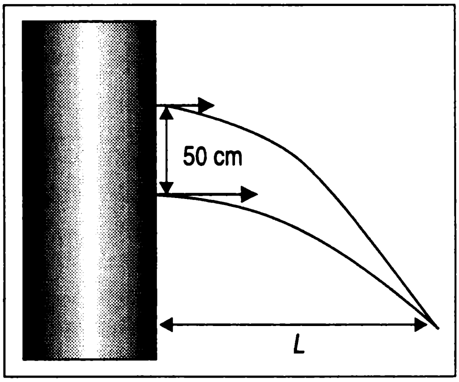
4.16. Самолет лети на височина 2000 m с постоянна скорост 300 m/s. Зенитно оръдие стреля по самолета в момента, в който той прелита над него (фиг. 4.12). Началната скорост на снаряда е 600 m/s. Под какъв ъгъл θ спрямо **вертикалата** трябва да стреля оръдието така, че снарядът да улучи самолета?



Фиг. 4.11



Фиг. 4.12



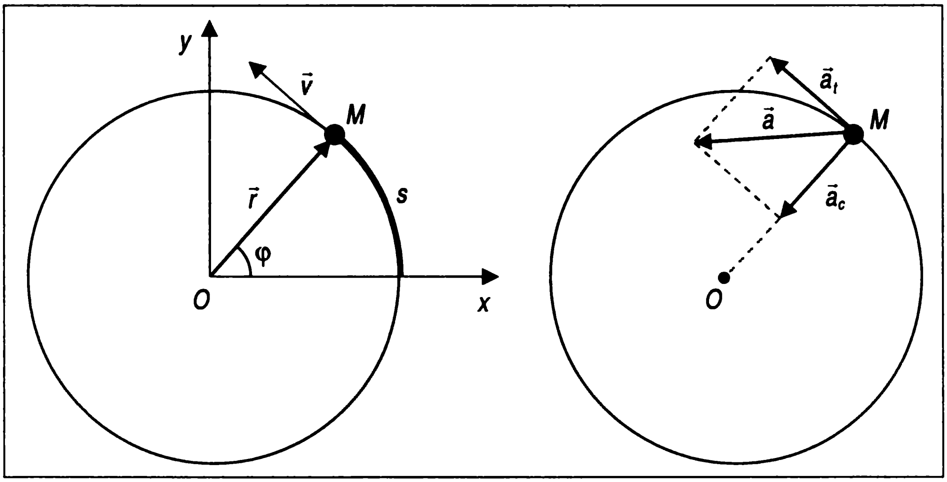
Фиг. 4.13

4.17. В стената на варел, пълен с вода, са пробити два малки отвора на разстояние 50 cm един над друг (фиг. 4.13). От отворите в хоризонтално направление изтичат две водни струи – със скорост 2 m/s от горния отвор и със скорост 3 m/s – от долния. На какво разстояние L от варела двете струи се срещат? *Упътване.* Получете уравненията, които описват траекториите на двете струи.

Движение по окръжност

При движение на материалната точка M по окръжност нейното положение се определя еднозначно от централния ъгъл φ, който радиус-векторът на точката сключва с оста x на координатната система (фиг. 4.14). Прието е този ъгъл да се измерва в **радиани** (rad), т.е. като отношение на дължината s на съответната му дъга към радиуса r на окръжността

$$\varphi = \frac{s}{r}.$$



Фиг. 4.14

Превръщането на ъгловата мярка от радиани в градуси (deg) се извършва по формулата

$$\varphi(\text{deg}) = \frac{180}{\pi}\varphi(\text{rad}),$$

защото на ъгъл от 180° съответства дъга от окръжността с дължина πr.

Ъглова скорост ω на материалната точка се нарича отношението

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

където $\Delta\varphi$ е промяната на ъгъла φ за малък интервал от време Δt. Ъгловата скорост се измерва в единици rad/s. Скоростта v на материалната точка (наричана още **линейна скорост**) е свързана с нейната ъглова скорост чрез съотношението

$$v = \omega r$$

и е насочена по допирателна към окръжността (вж. фиг. 4.14). Ако ъгловата скорост на материалната точка е постоянна, постоянна по големина е и нейната линейна скорост. В този случай говорим за **равномерно движение** по окръжност.

Ускорението $\vec{a}$ на материалната точка може да бъде разложено на две компоненти (вж. фиг. 4.14)

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t.$$

Компонентата $\vec{a}_c$ се нарича **центростремително ускорение** и е насочена към центъра на окръжността. Центростремителното ускорение е свързано с промяната на посоката на скоростта и неговата големина е

$$a_c = \frac{v^2}{r}.$$

Компонентата $\vec{a}_t$ се нарича **тангенциално ускорение** и е насочена по допирателна към окръжността. Тангенциално ускорение се дава с формулата

$$\vec{a}_t = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

където Δv е промяната на големината на скоростта за малък интервал от време Δt. При равномерно движение по окръжност големината на скоростта е постоянна и следователно тангенциалното ускорение е нула. В този случай материалната точка има само центростремително ускорение.

Когато разглеждаме въртене на твърдо тяло около определена ос в пространството (например автомобилна гума, макара, ротор на електродвигател и т.н.), трябва да имаме предвид, че за даден интервал от време всички точки от тялото се завъртат на еднакъв ъгъл, т.е. движат се около оста по окръжности с еднакви ъглови скорости. В този случай можем да говорим за ъглова скорост на тялото като цяло.

ПРИМЕРИ

4.18. Колко пълни завъртания прави за 5 s роторът на електродвигател, който се върти с постоянна ъглова скорост 15 rad/s?

Дадено: $\omega = 15$ rad/s, $t = 5$ s

Да се намери: N

Решение

За даденото време роторът се завърта на ъгъл

$$\varphi = \omega t = 75 \text{ rad}.$$

Известно е, че една пълна обиколка съответства на ъгъл на завъртане 2π rad. Следователно броят на пълните завъртания е цялата част на отношението

$$\frac{\varphi}{2\pi} \approx 11{,}94,$$

т.е. $N = 11.$

4.19. Пресметнете скоростта и центростремителното ускорение на точка: а) от Екватора; б) намираща се на 60° северна ширина. Радиусът на Земята е 6370 km, а продължителността на денонощието – 24 часа.

Дадено: $R = 6{,}37.10^3$ km, $T = 24$ h

Да се намери: v_1, v_2, a_{1c}, a_{2c}

Решение

За едно денонощие всяка точка от земната повърхност прави една пълна обиколка около оста на Земята и се завърта на ъгъл $\varphi = 2\pi$ rad. Следователно всички точки от земната повърхност се движат с еднакви ъглови скорости

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

а) Точките от Екватора описват при своето движение окръжности с радиус, равен на земния радиус R (фиг. 4.15). От връзката между ъглова скорост и линейна скорост намираме

$$v_1 = \omega R = \frac{2\pi R}{T}.$$

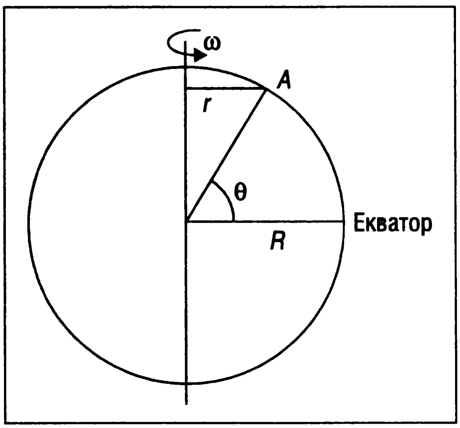
За да получим правилен числен отговор, е необходимо да изразим земния радиус в метри, а периода на обикаляне – в секунди

$$R = 6{,}37.10^6 \text{ m}; \; T = 86\,400 \text{ s}.$$

Тогава за линейната скорост намираме: $v_1 \approx 463$ m/s.

Центростремителното ускорение на точките от Екватора съответно е

$$a_{1c} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \approx 3{,}37.10^{-2} \text{ m/s}^2.$$



Фиг. 4.15

б) Дадена точка *A* на географска ширина θ се намира на разстояние

$$r = R\cos\theta$$

от земната ос и нейната скорост съответно е:

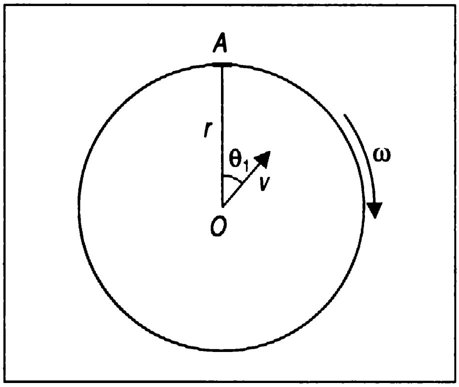
$$v_2 = \omega r = \frac{2\pi R}{T}\cos\theta.$$

Като вземем предвид, че cos60° = 1/2, пресмятаме $v_A \approx 232$ m/s.

За центростремителното ускорение на същата точка намираме

$$a_{2c} = \frac{v_2^2}{r} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}\cos\theta \approx 1{,}69\,.10^{-2}\,\mathrm{m/s^2}.$$

4.20. а) Стрелец с лък се намира в центъра *O* на хоризонтален диск с радиус 10 m, който се върти с ъглова скорост 0,5 rad/s. Стрелата излита със скорост 20 m/s спрямо лъка. Стрелецът трябва да уцели мишена, разположена в т. *A* от периферията на диска (фиг. 4.16). Под какъв ъгъл θ_1 спрямо правата *OA* трябва да бъде насочена стрелата, така че да уцели мишената?



Фиг. 4.16

б) Мишената е поставена в центъра на диска, а стрелецът се премества в т. *A*. Под какъв ъгъл θ_2 спрямо правата *AO* трябва да бъде насочена стрелата в този случай, така че да попадне в мишената?

Действието на силата на тежестта върху стрелата се пренебрегва.

Дадено: r = 10 m, v = 20 m/s, ω = 1 rad/s

Да се намери: θ_1, θ_2

Решение

а) Стрелата излита със скорост v и достига периферията на диска след време

$$t = \frac{r}{v}.$$

За това време мишената ще се премести в т. A_1 такава, че

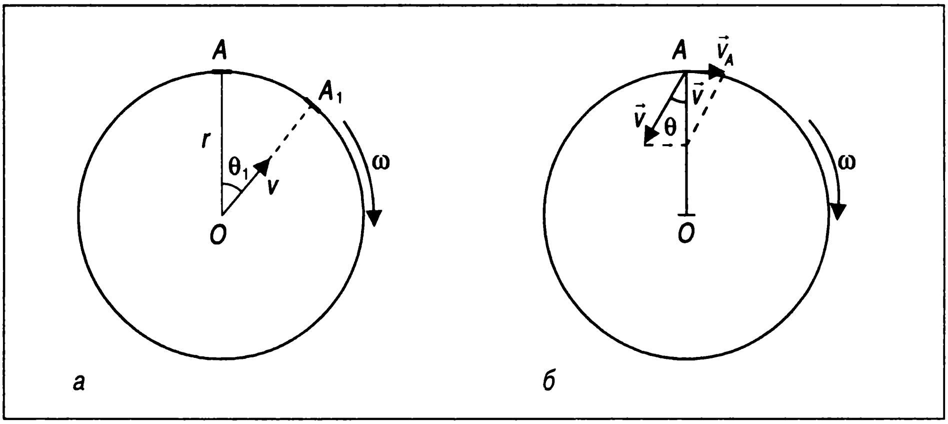
$$\sphericalangle AOA_1 = \omega t = \frac{\omega r}{v},$$

както е показано на фиг. 4.17, *а*. Следователно стрелата ще уцели мишената, ако е насочена към т. A_1, т.е. под ъгъл θ_1 спрямо правата *OA* такъв, че

$$\theta_1 = \sphericalangle AOA_1 = \frac{\omega r}{v} = 0{,}5\,\mathrm{rad} = 28{,}6°.$$

б) В този случай точката, в която стои стрелецът, се движи със скорост $\vec{v}_A$, която има големина $v_A = \omega\, r$ и е насочена по допирателна към периферията на диска (фиг. 4.17, *б*). Ако стрелата е изстреляна със скорост $\vec{v}$ спрямо диска, то векторът на нейната скорост спрямо Земята е

$$\vec{v}\,' = \vec{v}_A + \vec{v}.$$



Фиг. 4.17

В този случай стрелата ще уцели мишената, ако векторът $\vec{v}'$ е насочен към центъра O на диска, т.е. перпендикулярно спрямо вектора $\vec{v}_A$, както е показано на фигурата. От векторния триъгълник определяме:

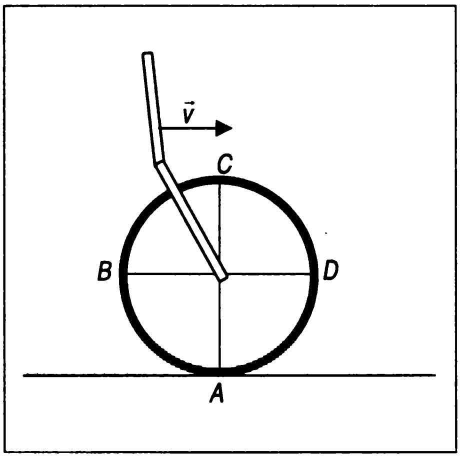
$$\sin\theta_2 = \frac{v_A}{v} = \frac{\omega r}{v} = 0{,}5,$$

$$\theta_2 = 30°.$$

Коментар. Както се вижда от получените резултати, когато стрелецът е застанал в центъра на диска, той винаги може да насочи стрелата под подходящ ъгъл, така че да уцели мишената. Във втория случай обаче съществува максимална ъглова скорост ω_{max} на диска, над която стрелецът никога не може да уцели мишената. Тя се определя от условието $\sin\theta_2 \leq 1$, откъдето следва

$$\omega_{max} = \frac{v}{r} = 2\,\mathrm{rad/s}.$$

4.21. Велосипед се движи с постоянна скорост v по хоризонтален път. Колелата на велосипеда се търкалят по пътя, без да приплъзват. С какви скорости спрямо пътя се движат точките A, B, C и D от предното колело (фиг. 4.18)?



Фиг. 4.18

Дадено: v

Да се намери: v_A, v_B, v_C, v_D

Решение

От условието, че колелото се върти без приплъзване, непосредствено следва, че т. A, която в дадения момент се допира до пътя, е неподвижна

$$v_A = 0.$$

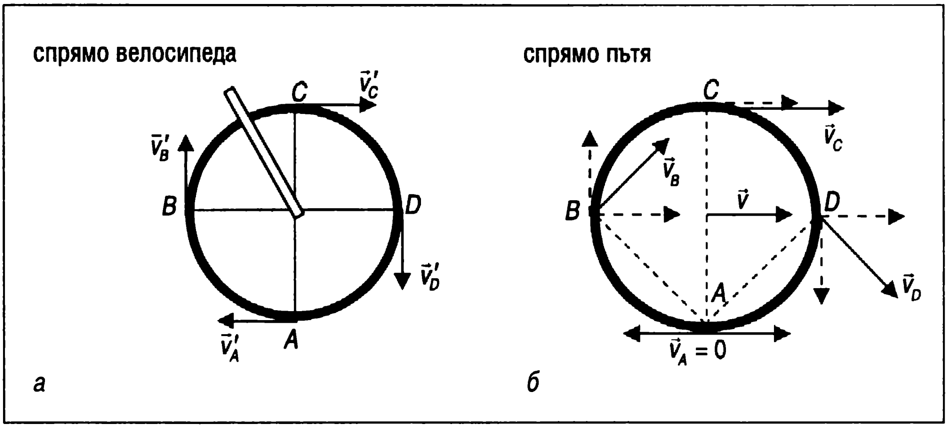
От гледна точка на велосипедиста точките A, B, C и D обикалят по окръжности около оста

O на колелото с еднакви ъглови скорости ω (фиг. 4.19, *а*). Спрямо тази отправна система те се движат с еднакви по големина скорости

$$v'_A = v'_B = v'_C = v'_D = \omega R,$$

насочени по допирателни към колелото, както е показано на фиг. 4.19, *а*. Спрямо пътя обаче скоростите на точките се определят от векторните равенства:

$$\vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{v};$$
$$\vec{v}_B = \vec{v}'_B + \vec{v};$$
$$\vec{v}_C = \vec{v}'_C + \vec{v};$$
$$\vec{v}_D = \vec{v}'_D + \vec{v},$$



Фиг. 4.19

където $\vec{v}$ е векторът на скоростта, с която велосипедът се движи спрямо пътя (фиг. 4.19, *б*). Понеже векторите $\vec{v}'_A$ и $\vec{v}$ имат противоположни посоки, големината на тяхната сума е

$$v_A = |v - v'_A| = |v - \omega R|.$$

Както вече видяхме, $v_A = 0$, откъдето следва

$$v = \omega R.$$

Това означава, че $v'_B = v'_C = v'_D = v$. Като използваме правилата за векторно събиране (фиг. 4.19, *б*), намираме окончателно:

$$v_B = v_D = v\sqrt{2},$$
$$v_C = 2v.$$

Коментар. Както се вижда от фиг. 4.19, *б*, скоростите, с които се движат точките B, C и D спрямо пътя, са насочени перпендикулярно съответно спрямо правите AB, AC и AD. Също така лесно можем да се убедим, че $v_B = \omega|AB|$, $v_C = \omega|AC|$ и $v_D = \omega|AD|$. Това означава, че в дадения момент движението на колелото спрямо пътя може да се разглежда като въртене с ъглова скорост ω около въображаема ос, наречена моментна ос на въртене, която минава през неподвижната т. A. Моментната ос на въртене във всеки друг момент минава през тази точка от колелото, която се допира до пътя.

4.22. Седалките в скоростна въртележка (паратропер) са разположени на разстояние 5 m от оста на въртене. Ъгловата скорост на въртележката започва да нараства по закона: $\omega = \varepsilon t$, където ε = 0,03 rad/s^2 е коефициент на пропорционалност. С какво ускорение се движат седалките след време t = 1 min?

Дадено: r = 5 m, ε = 0,03 rad/s^2, t = 1 min
Да се намери: a
Решение

От връзката $v = \omega r$ установяваме, че скоростта на седалката се изменя правопропорционално на времето

$$v = (\varepsilon r)t.$$

За интервал от време Δt големината на скоростта нараства с $\Delta v = (\varepsilon r)\Delta t$. Следователно седалката се движи с постоянно тангенциално ускорение

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \varepsilon r,$$

и същевременно притежава центростремително ускорение

$$a_c = \frac{v^2}{r} = (\varepsilon t)^2 r.$$

Векторът на пълното ускорение на седалката е

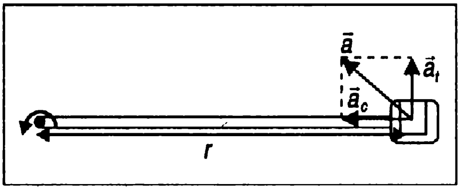
$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t.$$

Неговата големина се определя от векторния триъгълник, показан на фиг. 4.20,

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{(\varepsilon t)^4 r^2 + (\varepsilon t)^2}.$$

Като вземем предвид, че t = 60 s, и заместим останалите числени стойности, намираме

$$a \approx 16 \text{ m/s}^2.$$

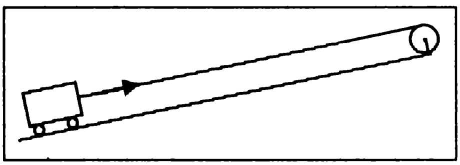


Фиг. 4.20

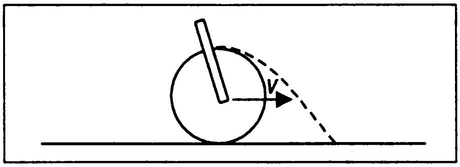
Задачи

4.23. Конец с дължина 10 m започва да се навива около макара с радиус 1 cm, която се върти с постоянна ъглова скорост 5 rad/s. За колко време конецът ще се навие около макарата?

4.24. За изтегляне на руда от минна галерия се използва вагонетка, закрепена към единия край на въже с дължина 50 m. Другият край на въжето се навива около макара с радиус 20 cm, закрепена към оста на електродвигател (фиг. 4.21). Ъгловата скорост на макарата се увеличава по закона: $\omega = \varepsilon t$, където ε = 0,1 rad/s^2 е коефициент на пропорционалност. Какво движение извършва вагонетката? За колко време тя ще бъде изтеглена от галерията?

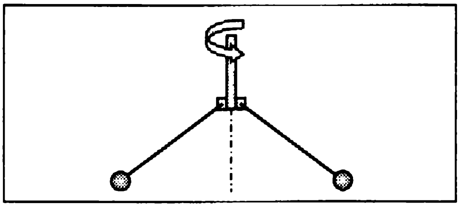

Фиг. 4.21

4.25. Велосипед се движи по хоризонтален път с постоянна скорост 5 m/s. От най-високата точка на предната гума излита парче кал (фиг. 4.22). На какво разстояние пред гумата ще падне парчето? Радиусът на гумата е 30 cm. Разстоянието се отчита от допирната точка на гумата с пътя до точката, в която пада парчето.



Фиг. 4.22

4.26. Тежинките в центробежен регулатор са закрепени към краищата на пръчки с дължини 20 cm, които са шарнирно свързани към вертикална ос (фиг. 4.23). Когато ъгловата скорост на оста достигне 10 rad/s, пръчките се отклоняват на ъгъл 60° спрямо вертикалата. Намерете скоростта и центростремителното ускорение на тежинките при това положение на пръчките.



Фиг. 4.23

4.27. Автомобил навлиза със скорост $v_0 = 15$ m/s в кръгов участък от пътя с радиус 50 m. Шофьорът натиска спирачката, при което скоростта на автомобила започва да намалява по закона $v = v_0 - kt$, където $k = 2$ m/s^2 е коефициент на пропорционалност. Пресметнете ускорението на автомобила непосредствено след натискане на спирачката.

ДИНАМИКА НА МАТЕРИАЛНА ТОЧКА

Движение под действие на постоянни сили

Приближението материална точка в динамиката се използва в два случая. В първия, когато размерът, формата и въртенето на дадено тяло са несъществени при изследване на неговото движение. Тогава можем мислено да заменим реалното тяло с една точка, разположена в неговия център на масите, в която са приложени всички външни сили, действащи на тялото. Другият случай е, когато едно твърдо тяло извършва постъпателно движение, т.е. всички негови точки се движат с еднакви скорости и еднакви ускорения. Тогава също можем да приемем, че силите са приложени в центъра на тежестта на масите. И в двата случая е валиден II принцип на Нютон

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n,$$

където $\vec{F}_1$, ..., $\vec{F}_n$ са векторите на външните сили, приложени върху тялото, а $\vec{a}$ е ускорението на неговия център на масите. В този раздел ще разглеждаме движение на тела под действие на постоянни по големина и посока сили. Тогава тялото извършва движение с постоянно ускорение.

При решаване на задачи от динамика е желателно да се придържаме към следната последователност:

1. Правим чертеж, на който изобразяваме телата, които съставят дадена механична система.

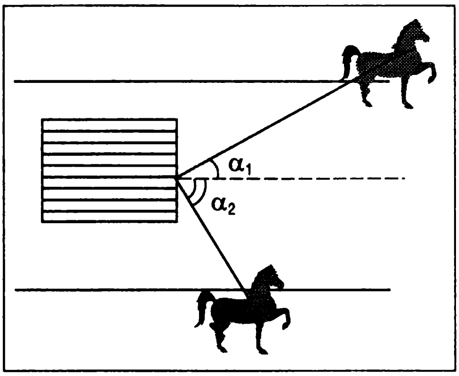
2. Изясняваме кои сили действат на отделните тела и изобразяваме векторите на силите върху чертежа. Обикновено това са силата на тежестта $\vec{G} = m\vec{g}$, силата на реакция на опората $\vec{R}$ и силата на триене $\vec{f}$. Следва да помним, че съгласно с III принцип на Нютон тялото упражнява върху опората сила на нормален натиск $\vec{N} = -\vec{R}$ и сила на триене $\vec{f}' = -\vec{f}$. Ако тялото е неподвижно спрямо опората, **силата на триене при покой** удоволетворява неравенството: $f \leq f_{max} = kN$. От III принцип на Нютон следва практически важната формула $f_{max} = kR$. Силата на триене при покой е насочена така, че да уравновесява другите сили, действащи върху тялото. Ако тялото се хлъзга по повърхността на опората, то големината на **силата на триене при хлъзгане** е постоянна: $f = kN = kR$, а посоката ѝ – противоположна на посоката на движение на тялото спрямо повърхността.

3. Избираме подходяща координатна система и записваме II принцип на Нютон за компонентите на силите и на ускорението по координатните оси.

4. Анализираме кои от величините, участващи в получената ситема от уравнения, са известни и кои трябва да бъдат определени.

ПРИМЕРИ

4.28. В миналото за придвижване на салове по тесни плавателни канали били използвани конски впрягове. Два коня, движещи се по противоположните брегове на канала, теглят сал с маса m = 2000 kg с помощта на въжета, които сключват ъгли с посоката му на движение съответно α_1 = 30° и α_2 = 60° (фиг. 4.24). Когато потегля от състояние на покой, салът започва да се движи с ускорение a = 0,1 m/s^2. Намерете силите на опъване на двете въжета.



Фиг. 4.24

Дадено: m = 2000 kg, α_1 = 30°, α_2 = 60°

Да се намери: F_1, F_2

Решение

I начин

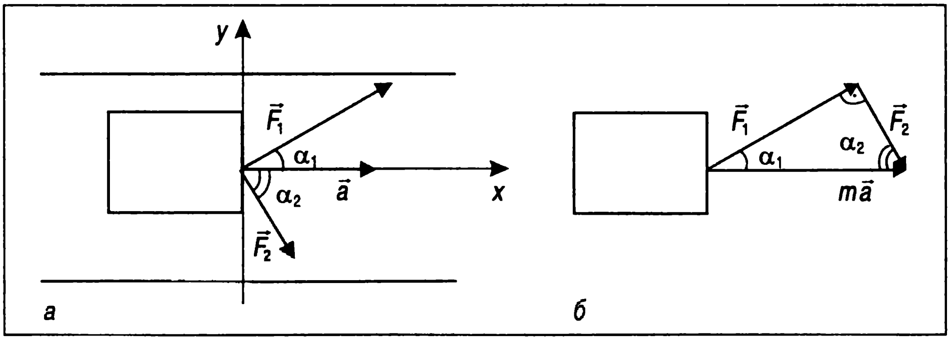
При движение на тяло в течност или газ върху него действа сила на съпротивление, пропорционална на квадрата на скоростта му. Следователно в момента на потегляне на сала, когато v = 0, върху него не действа сила на съпротивление, а единствено силите $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ на опъване на въжетата. От II принцип на Нютон следва

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Избираме координатна система с ос x по посока на ускорението на сала и ос y – перпендикулярна спрямо бреговете (фиг. 4.25, *а*). Векторното равенство е еквивалентно на две числови равенства за компонентите на векторите върху координатните оси:

по x: $ma = F_1\cos\alpha_1 + F_2\cos\alpha_2$,

по y: $0 = F_1\sin\alpha_1 - F_2\sin\alpha_2$.



Фиг. 4.25

След като решим системата от тези две уравнения, намираме:

$$F_1 = \frac{ma\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} \approx 173\,\text{N},$$

$$F_2 = \frac{ma\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} = 100\,\text{N}.$$

При получаване на тези формули използвахме тригонометричното тъждество

$$\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2 = \sin(\alpha_1+\alpha_2).$$

II начин

От II принцип на Нютон $m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ следва, че векторите $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $m\vec{a}$ образуват триъгълник (фиг. 4.25, *б*). Понеже $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ сключват помежду си прав ъгъл ($\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$), векторният триъгълник е правоъгълен с катети F_1 и F_2, и хипотенуза ma. От дефиницията на функцията „синус" следва, че:

$F_1 = ma\sin\alpha_2 \approx 173$ N,

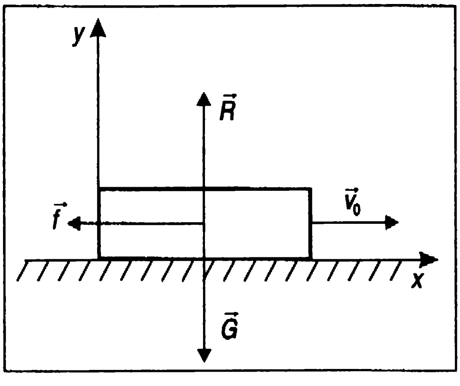
$F_2 = ma\sin\alpha_1 = 100$ N.

Получените отговори са еквивалентни на тези, намерени по първия начин, като вземем предвид, че $\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \sin(90°) = 1$.

4.29. На хокейна шайба е придадена начална скорост 0,5 m/s. Шайбата изминава разстояние 10 m по хоризонтална заледена повърхност, докато спре. Пресметнете коефициента на триене между шайбата и леда.

Дадено: $v_0 = 0{,}5$ m/s, $s = 10$ m, $g = 9{,}8$ m/s^2
Да се намери: k
Решение

Върху шайбата действат силата $\vec{G}$ на тежестта, силата $\vec{R}$ на реакцията на леда и силата $\vec{f}$ на триене, която е насочена в противоположна посока спрямо началната скорост на шайбата (фи. 4.26). Избираме ос x, която е



Фиг. 4.26

хоризонтална и е в посоката на движение на шайбата, и ос y, насочена вертикално нагоре. От II принцип на Нютон имаме

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{f},$$

или след проектиране по координатните оси:

$$ma_x = -f,$$

$$0 = R - mg.$$

Като вземем предвид, че $f = kR$, намираме

$$a_x = -kg.$$

Знакът „–“ пред компонентата на ускорението показва, че шайбата се движи равнозакъснително, като законът за скоростта има вида

$$v_x = v_0 + a_x t = v_0 - kgt,$$

а за x-координатата

$$x = v_0 t - \frac{kgt^2}{2}.$$

Шайбата спира в момента t_0, в който $v_x = 0$, т.е. $t_0 = \frac{v_0}{kg}$. Пътят, който изминава шайбата, е равен на x-координатата в момента на спиране

$$s = x(t_0) = \frac{v_0^2}{2kg}.$$

От полученото равенство намираме коефициента на триене

$$k = \frac{v_0^2}{2sg} \approx 1{,}3\,.10^{-3}.$$

4.30. Трупче се намира върху наклонена равнина, която сключва ъгъл 30° с хоризонта. При каква най-малка стойност k_{min} на коефициента на триене между трупчето и равнината то ще остане в състояние на покой? С какво ускорение ще започне да се хлъзга трупчето при коефициент на триене $k = 1/2\, k_{min}$?

Дадено: $\alpha = 30°$, $g = 9{,}8$ m/s^2

Да се намери: k_{min}, a

Решение

Избираме координатна система с ос x, успоредна на равнината, и ос y, насочена перпендикулярно на нея (фиг. 4.27, *а*). Върху трупчето действат три сили: силата на тежестта $\vec{G} = m\vec{g}$, силата $\vec{R}$ на реакцията на равнината и силата на триене $\vec{f}$. Трупчето ще се намира в равновесие, когато векторната сума на трите сили е нула

$$m\vec{g} + \vec{R} + \vec{f} = 0.$$

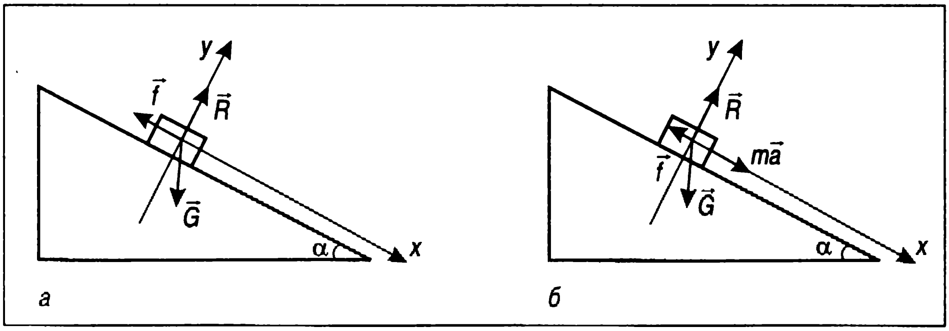
Това векторно равенство е еквивалентно на система от две числови равенства за компонентите на векторите по координатните оси:

по x: $mg\sin\alpha - f = 0,$

по y: $R - mg\sin\alpha = 0.$

Обърнете внимание, че при проектиране на векторите са отчетени и алгебричните знаци на проекциите: „+“, когато посоката на проекцията и на съответната ос са еднакви, и „–“, когато са противоположни.

Когато едно тяло е неподвижно спрямо дадена повърхност, силата на триене е по-



Фиг. 4.27

малка или равна на максималната сила на триене при покой

$$f \le kR.$$

Като използваме условията за равновесие, получаваме:

$$mg\sin\alpha \le kmg\cos\alpha,$$

$$k \ge \operatorname{tg}\alpha.$$

Най-малката стойност на коефициента на триене, при която трупчето ще остане в покой спрямо равнината, следователно е

$$k_{min} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577.$$

При по-малка стойност на коефициента на триене трупчето започва да се хлъзга с постоянно ускорение $\vec{a}$ по равнината (фиг. 4.27, *б*). От II принцип на Нютон имаме

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{f},$$

или съответните две числови равенства за компонентите:

по x: $\quad ma = mg\sin\alpha - f,$

по y: $\quad 0 = R - mg\cos\alpha.$

Когато трупчето се хлъзга по равнината, силата на триене се определя от равенството

$$f = kN = kmg\cos\alpha.$$

Като заместим израза за f в уравнението за движение по x, получаваме

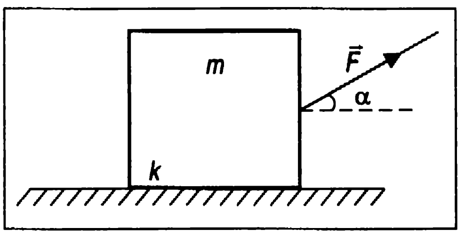
$$a = g(\sin\alpha - k\cos\alpha).$$

Заместваме k = 1/2 k_{max} = 1/2 $\operatorname{tg}\alpha$ в получения израз за ускорението и намираме окончателно

$$a = 1/2 g\sin\alpha = 2,45\ \mathrm{m/s^2}.$$

4.31. а) При каква сила F, приложена към въже, закрепено за сандък с маса m, сандъкът ще се хлъзга с постоянна скорост по хоризонтална равнина (фиг. 4.28)? Въжето е наклонено под ъгъл α спрямо хоризонта. Коефициентът на триене между сандъка и равнината е k.

** б) Под какъв ъгъл α_0 трябва да бъде наклонено въжето, така че силата F да бъде възможно най-малка?



Фиг. 4.28

Дадено: α, g, k
Да се намери: F, α_0
Решение

а) Върху сандъка действат четири сили: силата на тежестта $\vec{G}$, силата $\vec{R}$ на реакцията на равнината (опората), силата на триене $\vec{f}$ и силата $\vec{F}$, с която е опънато въжето (фиг. 4.29, *а*). Понеже сандъкът се движи с постоянна скорост, неговото ускорение е нула. От II принцип на Нютон следва, че в този случай векторната сума на всички сили също е нула

$$m\vec{g} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{F} = 0.$$

Проектираме силите по осите x и y:

по x: $F\cos\alpha - f = 0,$

по y: $F\sin\alpha + R - mg = 0.$

От второто уравнение определяме силата на реакция на опората

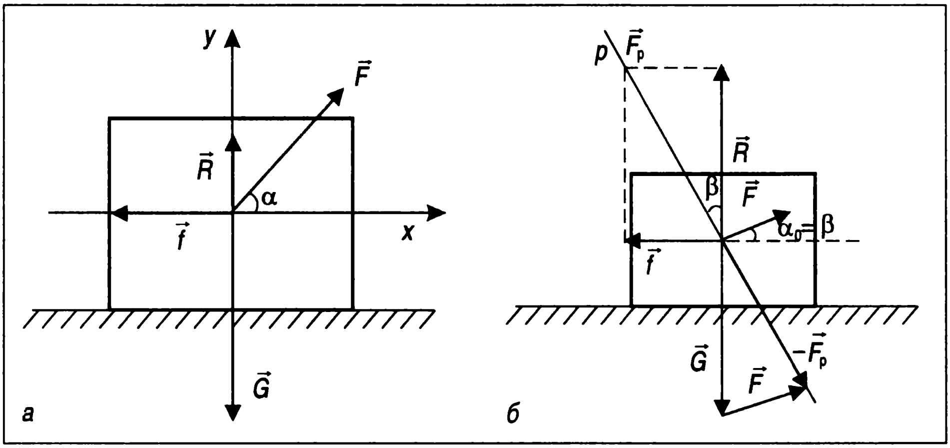
$$R = mg - F\sin\alpha.$$

Тъй като при хлъзгане силата на триене е пропорционална на реакцията на опората – $f = kR$, получаваме

$$F\cos\alpha - kmg + F\sin\alpha = 0,$$

откъдето окончателно намираме големината на силата F

$$F = \frac{kmg}{\cos\alpha + k\sin\alpha}.$$



Фиг. 4.29

б) Непосредственото изследване на F като функция на ъгъла α изисква специален математичен метод – диференциално смятане. Ъгълът α_0 обаче може да бъде определен и чрез подходящо геометрично построение. За целта ще разгледаме вектора

$$\vec{F}_p = \vec{R} + \vec{f},$$

т.е. равнодействащата на силата на нормална реакция на опората и на силата на триене. Както се вижда от фиг. 4.29, *б*, този вектор сключва с вертикалата ъгъл β такъв, че

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{f}{N} = k.$$

Следователно, когато сандъкът се хлъзга, равнодействащата $\vec{F}_p$ винаги лежи на една и съща права p, наклонена под ъгъл β спрямо вертикалата. Когато сандъкът се движи с постоянна скорост ($\vec{a} = 0$), условието за равновесие на силите води до следното равенство:

$$m\vec{g} + \vec{F} = -\vec{F}_p,$$

т.е. равнодействащата на силата на тежестта и на силата на опъване също лежи върху правата p. Минималната големина на F, за която е изпълнено това условие, съответства на случая, когато векторът $\vec{F}$ е перпендикулярен на p (фиг. 4.29, *б*). Както се вижда от чертежа, в този случай силата $\vec{F}$ сключва с хоризонта ъгъл $\alpha_0 = \beta$, т.е.

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = k.$$

Лесно се установява, че съответната големина на силата на опъване при този ъгъл е

$$F_{min} = mg\sin\alpha_0 = \frac{mgk}{\sqrt{1+k^2}}.$$

4.32. Върху автомобил с маса $m = 1000$ kg действа сила F на съпротивление от страна на въздуха, която зависи от скоростта му v по закона

$$F = cv^2,$$

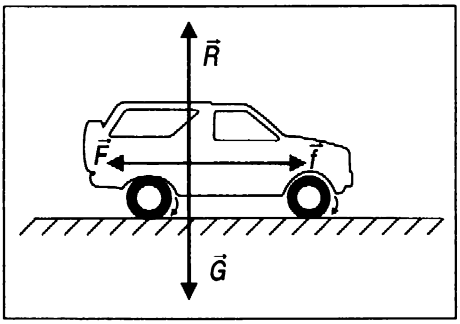
където $c = 2{,}0$ kg/m е коефициент на пропорционалност. Коефициентът на триене между гумите и пътя е $k = 0{,}8$. Автомобилът, който първоначално се движи с постоянна скорост 30 m/s, започва да изпреварва намиращия се пред него камион. Намерете максималното ускорение, с което автомобилът може да се движи по време на изпреварването. Приемете, че и четирите колела на автомобила са водещи, т.е. задвижват се от двигателя.

Дадено: $v = 30$ m/s, $c = 2{,}0$ kg/m, $k = 0{,}8$, $m = 1000$ kg, $g = 9{,}8$ m/s^2

Да се намери: a_{max}

Решение

За да решим задачата, трябва преди всичко да изясним коя е силата, която кара автомобила да се ускорява. Според едно често срещано мнение това е силата, с която двигателят (или по-точно механичната предавка, която предава въртенето от коляновия вал) действа върху водещите колела. Действително двигателят е необходим, за да може водещите колела да се въртят, но това още не е достатъчно автомобилът да се движи. От непосредствени наблюдения знаете, че дори много мощни автомобили не могат да потеглят, ако между гумите и пътя няма достатъчно триене, например върху заледена настилка. В този случай водещите колела боксуват, т.е. превъртат се свободно спрямо пътя. Следователно външната сила, която позволява на автомобила да се ускорява, е именно силата на триене f между водещите колела и пътя, която е насочена напред спрямо посоката на движение (фиг. 4.30).



Фиг. 4.30

Както се вижда от чертежа, в направление на оста y действат силите $\vec{G}$ и $\vec{R}$, които взаимно се уравновесяват, т.е.

$$R = mg.$$

Силата R е сума от силите на реакцията, с които пътят действа върху четирите колела. В направление на оста x действат силата $\vec{f}$ на триене между колелата и пътя и силата $\vec{F}$ на съпротивление на въздуха. От II принцип на Нютон и от връзката между силата на съпротивление и скоростта следва, че

$$a = \frac{f - F}{m} = \frac{f - cv^2}{m}.$$

Максималната сила на триене между гумите и пътя е

$$f_{max} = kR = kmg.$$

Следователно максималното ускорение на автомобила е

$$a_{max} = kg - \frac{cv^2}{m} \approx 6{,}0\,\mathrm{m/s^2}.$$

Коментар. Ние определихме максималното ускорение на автомобила при зададения коефициент на триене между гумите и пътя. Дали обаче то ще бъде достигнато, зависи от мощността на самия двигател.

4.33. Върху гладка хоризонтална повърхност е поставена дъска с дължина L и маса m_1. В единия край на дъската се намира трупче с маса m_2. Коефициентът на триене между трупчето и дъската е k. Триенето между дъската и повърхността се пренебрегва. Каква най-малка начална скорост v_0 трябва да бъде придадена на трупчето, така че то да достигне другия край на дъската?

Дадено: m_1, m_2, k, g
Да се намери: v_0
Решение

Върху трупчето действат силата на тежестта $\vec{G}_2 = m_2\vec{g}$, силата $\vec{R}$ на реакция на дъската и силата $\vec{f}$ на триене, която е насочена в посока, противоположна на началната скорост $\vec{v}_0$ (фиг. 4.31, *а*). От условието за равновесие в направление на оста y намираме

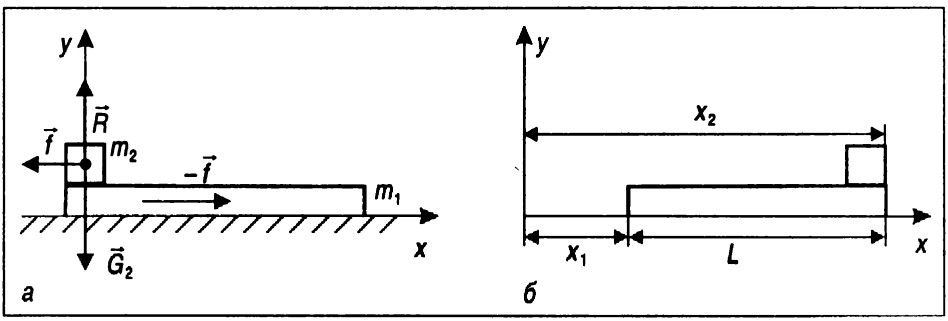
$$R = m_2 g.$$

В направление на оста x върху трупчето действа само силата на триене, която има отрицателна проекция

$$f_x = -kN = -km_2 g.$$

От II принцип на Нютон определяме ускорението на трупчето a_{2x} в направление на x:

$$a_{2x} = \frac{f_x}{m_2} = -kg.$$



Фиг. 4.31

Нужно е обаче да отчетем, че самата дъска започва да се движи напред с определено ускорение a_{1x}. Съгласно с III принцип на Нютон трупчето действа върху дъската със сила на триене $\vec{f}_1 = -\vec{f}$, която има проекция върху x:

$$f_{1x} = -f_x = +km_2g.$$

От II принцип на Нютон намираме ускорението на дъската

$$a_{1x} = \frac{f_{1x}}{m_1} = k\frac{m_2}{m_1}g.$$

Както се вижда от получените резултати, трупчето ще се движи равнозакъснително, като скоростта му ще намалява по закона

$$v_{2x} = v_0 + a_{2x}t = v_0 - kgt.$$

От друга страна, дъската се ускорява от начално състояние на покой, като скоростта ѝ нараства по закона

$$v_{1x} = a_{1x}t = \frac{km_2gt}{m_1}.$$

Трупчето ще се хлъзга спрямо дъската до момента t_1, в който скоростите им се изравнят. В този момент трупчето престава да се движи спрямо дъската и после остава неподвижно спрямо нея. От законите за скоростта имаме

$$v_0 - kgt_1 = \frac{km_2gt_1}{m_1}$$

или $$t_1 = \frac{v_0m_1}{kg(m_1+m_2)}.$$

Ако в момента t_1 трупчето е достигнало другия край на дъската, както се вижда от фиг. 4.31, *б*, е изпълнено условието

$$x_2 - x_1 = L,$$

където x_2 и x_1 са съответно преместванията на трупчето и на дъската. От законите за равнопроменливо движение намираме:

$$x_1 = \frac{a_{1x}t_1^2}{2} = \frac{v_0^2m_1m_2}{2kg(m_1+m_2)^2};$$

$$x_2 = v_0t - \frac{a_{2x}t_1^2}{2} = \frac{v_0^2m_1(m_1+2m_2)}{2kg(m_1+m_2)^2}.$$

Следователно

$$x_2 - x_1 = \frac{v_0^2m_1}{2kg(m_1+m_2)} = L,$$

откъдето окончателно намираме търсената начална скорост

$$v_0 = \sqrt{2kgL\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)}.$$

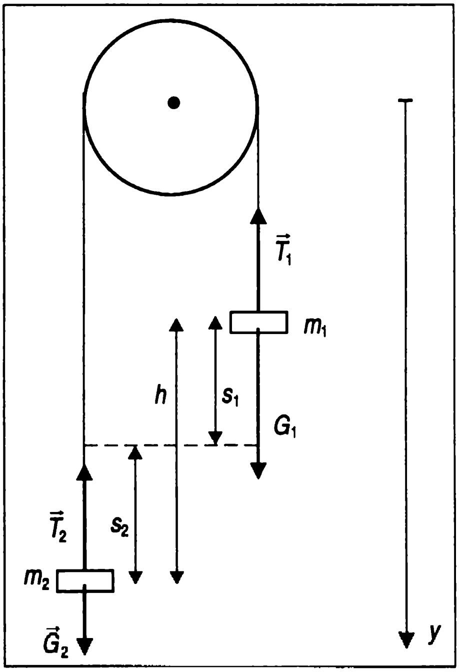
4.34. Към двата края на лека неразтеглива нишка са закрепени две тела с маси съответно $m_1 = 200$ g и $m_2 = 100$ g. Нишката е прехвърлена през макара, по която може да се хлъзга без триене. В началния момент двете тела са неподвижни, като тялото 1 е разположено на височина $h = 0{,}5$ m над тялото 2. Намерете: а) силата на опъване T на нишката по време на движение на системата; б) времето t, след което двете тела ще се окажат на еднакви височини.

Дадено: $m_1 = 200$ g, $m_2 = 100$ g, $h = 0{,}5$ m, $g = 9{,}8$ m/s^2

Да се намери: T, t

Решение

а) Насочваме оста y на координатната система надолу – в посоката на движение на по-тежкото тяло (тяло 1), както е показано на фиг. 4.32. Върху него действат две сили: силата на тежестта $\vec{G}_1 = m_1\vec{g}$ и силата $\vec{T}_1$ на опъване в този край на нишката, в който то е закрепено. Аналогично върху тялото 2 действат силата на тежестта $\vec{G}_2 = m_2\vec{g}$ и силата $\vec{T}_2$ на опъване в другия край на нишката. Понеже нишката е с пренебрежима маса, силите на опъване в двата ѝ края са еднакви по големина



Фиг. 4.32

$$T_1 = T_2 = T.$$

Тъй като нишката е неразтеглива, двата ѝ края се движат с еднакви по големина ускорения, които имат противоположни посоки

$$\vec{a}_1 = \vec{a} \quad \text{и} \quad \vec{a}_2 = -\vec{a}.$$

Следователно от II принцип на Нютон получаваме следните уравнения за движение на двете тела в направление на оста y:

$$\left| \begin{aligned} & m_1 a = m_1 g - T \\ & m_2(-a) = m_2 g - T. \end{aligned} \right.$$

От получената система уравнения изразяваме ускорението на телата

$$a = g\frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

и намираме силата на опъване на нишката

$$T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \approx 1{,}3 \text{ N}.$$

б) Понеже нишката е неразтеглива, за даден интервал от време двете тела изминават еднакви пътища

$$s_1 = s_2 = \frac{at^2}{2}.$$

В момента t, в който двете тела застават на еднаква височина, е изпълнено равенството (вж. фиг. 4.32)

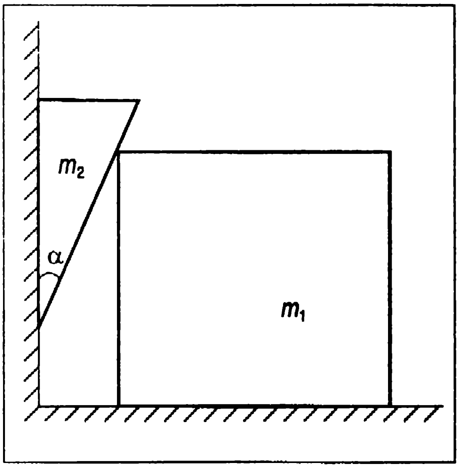
$$s_1 + s_2 = h$$

или $\quad at^2 = h,$

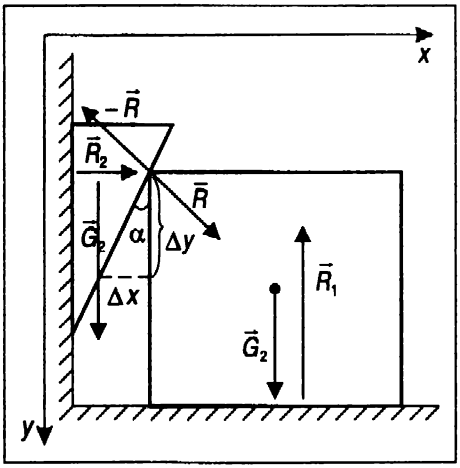
откъдето $t=\sqrt{\dfrac{h(m_1+m_2)}{g(m_1-m_2)}}\approx 0{,}39$ s,

като при получаване на последната формула използвахме израза за ускорението, изведен в предишната точка.

4.35. Трупче с маса m_1 може да се хлъзга без триене по хоризонтална равнина (фиг. 4.33). Между трупчето и вертикална стена е поставен клин с маса m_2 и ъгъл при върха α. Триенето между клина и трупчето, както между клина и стената, се пренебрегва. Намерете ускоренията a_1 и a_2, с които се движат съответно трупчето и клинът.



Фиг. 4.33



Фиг. 4.34

Дадено: m_1, m_2, α, g
Да се намери: a_1, a_2
Решение

Понеже между трупчето и клина няма триене, клинът действа върху трупчето единствено със сила $\vec{R}$, насочена перпендикулярно спрямо допирната повърхност (фиг. 4.34). Към трупчето са приложени освен това силата на тежестта $\vec{G}_1$ и силата на реакцията на опората $\vec{R}_1$. От II принцип на Нютон имаме:

$$m_1\vec{a}_1=\vec{R}+m_1\vec{g}+\vec{R}_1.$$

В направление на оста x проекция има само силата $\vec{R}: R_x=R\cos\alpha$. Следователно

$$m_1a_1=R\cos\alpha.$$

От III принцип на Нютон следва, че трупчето действа върху клина със сила $-\vec{R}$. Върху клина са приложени още силата на тежестта $\vec{G}_2$ и силата $\vec{R}_2$ на реакция на стената. От II принцип на Нютон следва

$$m_2\vec{a}_2=m_2\vec{g}+\vec{R}_2-\vec{R}.$$

След като проектираме векторното равенство в направлиние на оста y, намираме

$$m_2\,a_2=m_2\,g-R\sin\alpha.$$

Изразяваме големината на силата R от уравнението за движение на трупчето

$$R = \frac{m_1 a_1}{\cos\alpha}.$$

Като заместим в уравнението за движение на клина, получаваме

$$m_2 a_2 = m_2 g - m_1 a_1 \mathrm{tg}\alpha.$$

За да определим еднозначно ускоренията a_1 и a_2, е необходимо да установим още една връзка между тях. За целта ще използваме факта, че по време на движението клинът непрекъснато се допира до трупчето. Следователно, ако клинът се премести на разстояние Δy надолу за време t, то трупчето се премества за същото време в хоризонтално направление на разстояние Δx такова, че

$$\Delta x = \Delta y\, \mathrm{tg}\alpha.$$

Понеже $\Delta x = \frac{a_1 t^2}{2}$ и $\Delta y = \frac{a_2 t^2}{2}$, намираме допълнителната връзка между двете ускорения

$$a_1 = a_2\, \mathrm{tg}\alpha.$$

Като използваме двете уравнения за ускоренията, намираме окончателно:

$$a_2 = \frac{m_2 g}{m_2 + m_1 \mathrm{tg}^2\alpha};$$

$$a_1 = \frac{m_2 g \cdot \mathrm{tg}\alpha}{m_2 + m_1 \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

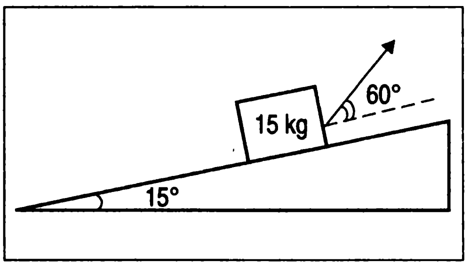
Задачи

4.36. Две еднакви по големина сили $F_1 = F_2 = 10$ N са приложени към материална точка с маса 2 kg. Намерете ускорението на материалната точка, ако силите сключват помежду си ъгъл: а) 0°; б) 60°; в) 90°; г) 120°.

4.37. Колко е спирачният път на автомобил, който преди задействане на спирачката се движи със скорост 36 km/h, ако коефициентът на триене между гумите и пътя е 0,5?

4.38. Ускорението на трупче, когато се хлъзга по дъска, наклонена под ъгъл 60° спрямо хоризонта, е 4 пъти по-голямо, отколкото, когато дъската е наклонена под ъгъл 30°. Намерете: а) коефициента на триене между дъската и трупчето; б) най-малкия ъгъл, при който трупчето може да се хлъзга по дъската.

4.39. Работник тегли с постоянна скорост сандък с маса 50 kg по рампа, наклонена под ъгъл 15° спрямо хоризонта. При това работникът прилага върху сандъка постоянна сила с големина 300 N, насочена под ъгъл 60° спрямо рампата (фиг. 4.35). Пресметнете коефициента на триене между сандъка и рампата.



Фиг. 4.35

4.40. Две трупчета с маси съответно $m_1 = 100$ g и $m_2 = 200$ g са допрени едно до друго върху равнина, наклонена под ъгъл $\alpha = 30°$ спрямо хоризонта (фиг. 4.36). Коефициентът на триене между горното трупче (с маса m_1) и равнината е $k_1 = 0{,}2$, а между долното трупче и равнината – $k_2 = 0{,}4$. Намерете ускорението a, с което трупчетата ще се хлъзгат по равнината, и силата F, с която горното трупче ще действа върху долното по време на тяхното движение. Изразете отговорите в параметричен вид и числено.

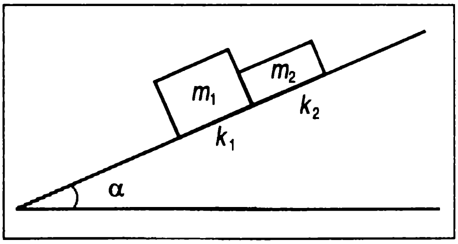
4.41. Лека и неразтеглива нишка е прехвърлена през неподвижна макара, по която може да се движи без триене. Към единия край на нишката е закрепена теглилка с маса 500 g, а другият ѝ край преминава през тесен отвор. Теглилката пада с ускорение 4 m/s^2. Пресметнете силата на триене между нишката и стените на отвора.

4.42. Получете израз за ускорението a, с което се движат телата в системата, изобразена на фиг. 4.37. Нишката е лека и неразтеглива. Триенето между трупчетата и повърхността на призмата, както и триенето между нишката и макарата се пренебрегват.

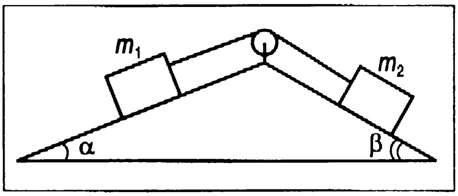
4.43. Получете израз за ускорението a, с което се движат телата в системата, изобразена на фиг. 4.38. Нишката е лека и неразтеглива. Коефициентът на триене между трупчето с маса m_1 и повърхността на масата е k. Триенето между нишката и макарата се пренебрегва.

4.44. Лека и неразтеглива нишка е прехвърлена през неподвижна макара. Нишката може да издържи максимална сила на опъване 5 N. Към единия край на нишката е закрепена теглилка с маса 1 kg. Намерете най-голямата маса на теглилката, окачена в другия край, при която нишката няма да се скъса по време на движение на системата.

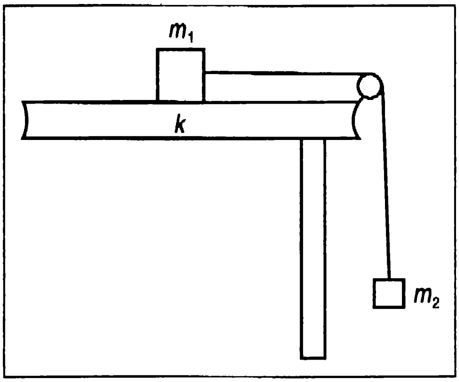
4.45. Тежка пръчка с маса m_1, която може да се движи свободно във вертикално направление, се опира в клин с маса m_2 и ъгъл при върха α (фиг. 4.39). Триенето между пръчката и клина, както и триенето между клина и хоризонталната равнина, се пренебрегват. Получете изрази за ускоренията a_1 и a_2, с които се движат съответно пръчката и клинът.



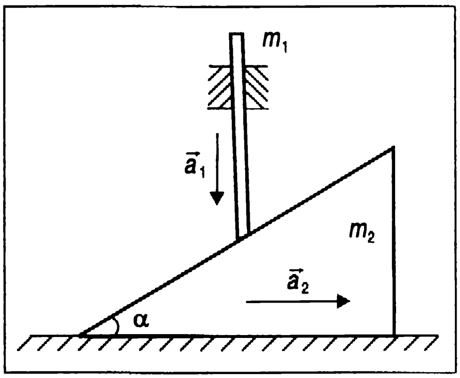
Фиг. 4.36



Фиг. 4.37



Фиг. 4.38



Фиг. 4.39

Динамика на движение по окръжност

Когато материална точка с маса m се движи равномерно със скорост v по окръжност с радиус r, тя има центростремително ускорение

$$a_c = \frac{v^2}{r}.$$

Следователно, за да може точката да обикаля по кръгова траектория, е необходима т. нар. **центростремителна** сила $\vec{F}_c$, насочена към центъра на окръжността, такава че:

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_c,$$

$$\frac{mv^2}{r} = F_c.$$

Произходът на центростремителната сила може да бъде различен. Например при завой на автомобил това е силата на триене между гумите и пътя, при обикаляне на електроните около атомното ядро – електростатичната сила на привличане и т.н. В частен случай, при обикаляне на небесни тела (планети, астероиди, космически кораби) около дадено централно тяло (например масивна планета или звезда), центростремителната сила е резултат от гравитационно привличане и се пресмята по закона Нютон за гравитацията

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

където m_1 и m_2 са съответно масите на двете тела, r – разстоянието между тях, а $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{N.m^2}}{\mathrm{kg^2}}$ е гравитационната константа. В редица случаи центростремителната сила е равнодействаща на две или повече сили, приложени върху материалната точка.

ПРИМЕРИ

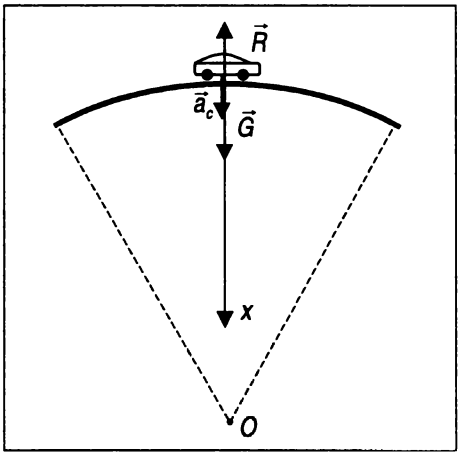
4.46. Автомобил с маса 1000 kg се движи с постоянна скорост 72 km/h по изпъкнал мост, който има форма на дъга от окръжност с радиус 500 m. Намерете теглото на автомобила, когато той се намира в най-високата точка на моста.

Дадено: $m = 1000$ kg, $v = 72$ km/h $= 20$ m/s, $r = 500$ m, $g \approx 10$ m/s^2

Да се намери: P

Решение

Теглото $\vec{P}$ на автомобила е силата на нормален натиск, която той оказва върху моста (фиг. 4.40). От III принцип на Нютон следва, че мостът оказва върху автомобила същата по големина, но противоположна по посока сила: $\vec{R} = -\vec{P}$, т.е. силата на реакция на опората.



Фиг. 4.40

Следователно големината P на теглото на автомобила може да бъде пресметната, ако определим големината R на нормалната реакция на опората: $P = R$.

Тъй като автомобилът се движи с постоянна скорост, той има единствено центростремително ускорение $\vec{a}_c$, насочено към центъра O на кривината на моста. Това ускорение е резултат от едновременното действие върху автомобила на силата на тежестта и силата на реакция на опората (фиг. 4.40). От II принцип на Нютон следва:

$$m\vec{a}_c = \vec{G} + \vec{R}.$$

Проектираме векторното равенство върху ос x, насочена от автомобила към т. O:

$$\frac{mv^2}{r} = mg - R,$$

откъдето намираме силата на реакция на опората и съответно теглото на автомобила:

$$P = R = m\left(g - \frac{v^2}{r}\right) = 9200\,\text{N}.$$

Коментар. Както виждаме, теглото на втомобила при движение по изпъкнал мост е с 800 N по-малко от теглото $P_0 = mg$, което той би оказвал при движение по хоризонтален равен път. Следователно изпъкналата форма на моста спомага за по-малкото натоварване на пътната настилка и за нейното по-бавно износване.

4.47. Нишката на математично махало с дължина l е отклонена на ъгъл α спрямо вертикалата. На топчето с маса m е придадена начална скорост в хоризонтално направление, така че то обикаля равномерно по окръжност около вертикалната ос, минаваща през точката на окачване на махалото. Получете изрази за периода T на обикаляне на топчето.

Дадено: m, g, l, α

Да се намери: T

Решение

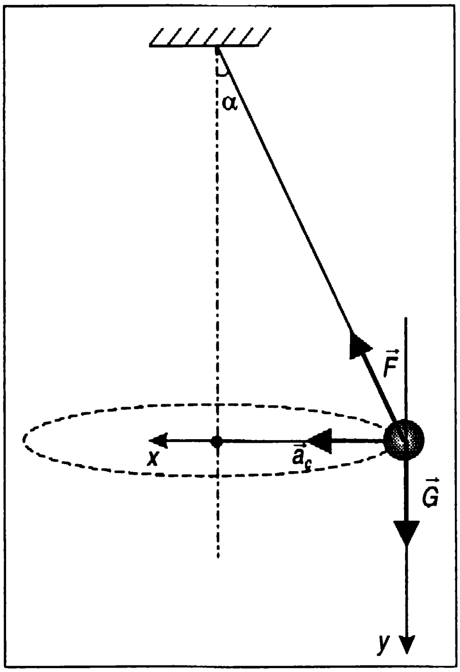
Понеже топчето се движи равномерно по окръжност, то има само центростремително ускорение, насочено хоризонтално, към центъра O на окръжността (фиг. 4.41). Центростремителната сила, създаваща това ускорение, е равнодействаща на силата на тежестта $\vec{G}$ и силата $\vec{F}$ на опъване на нишката. От II принцип Нютон имаме:

$$m\vec{a}_c = \vec{G} + \vec{F}.$$

Избираме ос x, която в даден момент е насочена хоризонтално, от топчето към центъра на окръжността. Същевременно избираме ос y, насочена вертикално надолу. Записваме уравнението за движение на топчето в проекции по координатните оси:

по x: $\dfrac{mv^2}{r} = F\sin\alpha,$

по y: $0 = mg - F\cos\alpha.$



Фиг. 4.41

От второто уравнение изразяваме силата на опъване

$$F = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

При равномерно обикаляне по окръжност е изпълнено съотношението

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

От чертежа също така се убеждаваме, че

$$r = l\sin\alpha.$$

Заместваме в уравнението за движение по x изразите за F, v и r

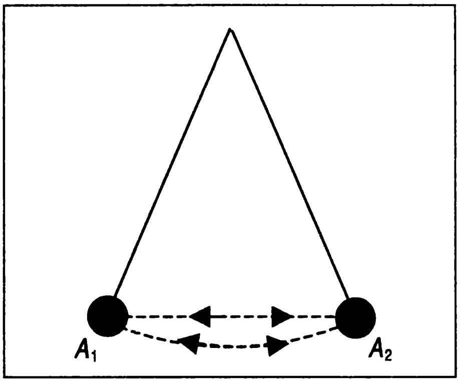
$$m\frac{4\pi^2}{T^2}l\sin\alpha = \frac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

откъдето намираме периода на обикаляне на топчето

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}.$$

Коментар. От получения резултат следва, че при малки ъгли на отклонение, когато $\cos\alpha \approx 1$, периодът на обикаляне на топчето е същият като периода на люлеене на математично махало

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$



Фиг. 4.42

Това съвпадение не е случайно, въпреки че става въпрос за два различни вида движение. За да се убедим в това, ще разгледаме движението на проекцията на топчето върху вертикална равнина в два случая – обикаляне по окръжност и люлеене. Експериментално такова изследване може да се извърши, като осветим топчето на махалото със светлинен сноп, насочен хоризонтално, и наблюдаваме движението на неговата сянка върху стената на стаята. В случай на обикаляне по окръжност сянката на топчето ще „трепти" наляво-надясно по отсечката A_1A_2 (фиг. 4.42). Когато топчето се люлее при същия начален ъгъл на отклонение α, сянката му ще описва дъгата $\overset{\frown}{A_1A_2}$. Колкото по-малък е ъгълът α, толкова по-малка е разликата между дължините на хордата A_1A_2 и дъгата $\overset{\frown}{A_1A_2}$. Следователно, ако наблюдаваме движението на сянката при много малки ъгли на отклонение, ние няма да можем да различим дали топчето се люлее или обикаля по окръжност и периодите на двата вида движение ще бъдат на практика еднакви.

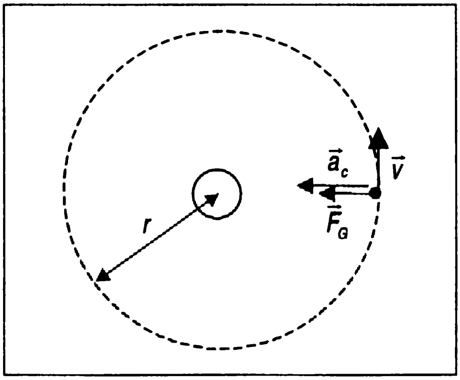
4.47. Намерете радиуса r на орбитата, по която обикаля геостационарен спътник на Земята. Радиусът на Земята е R = 6370 km, ускорението на свободно падане върху земната повърхност – g = 9,8 m/s^2, и продължителността на денонощието – T = 24 h.

Дадено: $R = 6{,}37.10^6$ m, g = 9,8 m/s^2, T = 24 h = 86 400 s

Да се намери: r

Решение

Геостационарен се нарича спътник, който обикаля около Екватора в посоката на денонощното въртене на Земята с период, равен на едно денонощие. Такъв спътник е неподвижен спрямо Земята и винаги се намира над точно определена точка от нейната повърхност. Центростремителното ускорение на спътника се дължи на гравитационната сила $\vec{F}_G$, с която Земята го привлича (фиг. 4.43). От II принцип на Нютон



Фиг. 4.43

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_G,$$

където m е масата на спътника. От закона на Нютон за гравитацията следва

$$F_G = \gamma \frac{Mm}{r^2},$$

където γ е гравитационната константа, а M – масата на Земята. Като вземем предвид, че $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2} r$, получаваме

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}.$$

Това равенство би ни позволило да определим радиуса r, ако беше известна масата на Земята. Тя обаче може да бъде изразена чрез ускорението g на свободно падане върху земната повърхност и радиуса на Земята R. Наистина върху всяко тяло, намиращо се в близост до земната повърхност, действа сила на тежестта mg, която е резултат от гравитационното взаимодействие на тялото със Земята. Следователно

$$mg = \gamma \frac{Mm}{R^2},$$

$$g = \gamma \frac{M}{R^2}.$$

След като изразим масата M от последното равенство и я заместим в уравнението за r, намираме окончателно

$$r = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}} \approx 4{,}22.10^7\,\mathrm{m} = 42\,200\,\mathrm{km}.$$

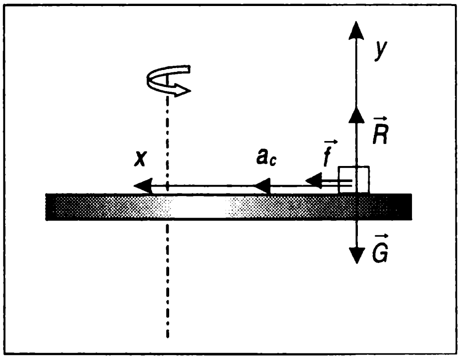
4.48. Тяло с малки размери е поставено върху кръгла хоризонтална платформа, която се върти около ос, минаваща през центъра ѝ, с ъглова скорост ω = 1 rad/s. Коефициентът на триене между тялото и платформата е k = 0,5. На какво най-голямо разстояние r_{max} от центъра на платформата може да бъде поставено тялото, така че да бъде неподвижно (т.е. да на се хлъзга) спрямо нея.

Дадено: ω = 1 rad/s, g = 9,8 m/s^2, k = 0,5
Да се намери: r_{max}
Решение

Ако тялото не се хлъзга спрямо платформата, то обикаля по окръжност около центъра ѝ със същата ъглова скорост ω, с каквато се върти платформата. Тогава тялото има центростремително ускорение

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r,$$

насочено към оста на въртене. При получаване на второто равенство отчетохме, че $v = \omega r$. Върху тялото действат три сили: силата на тежестта $\vec{G}$ и реакцията на опората $\vec{R}$, насочени във вертикално направление, и силата $\vec{f}$ на триене, която е хоризонтална и е насочена към оста на въртене (фиг. 4.44). От II принцип на Нютон следва, че



Фиг. 4.44

$$m\vec{a}_c = \vec{G} + \vec{R} + \vec{f}.$$

След като проектираме силите върху осите x и y, получаваме:

по x: $m\omega^2 r = f$,

по y: $0 = R - mg$.

Когато тялото е в покой, т.е. не се хлъзга спрямо платформата, за силата на триене е изпълнено неравенството

$$f \leq kN = kR,$$

откъдето следва

$$\omega^2 r \leq kg.$$

Най-голямото разстояние r_{max}, за което е изпълнено това условие, е

$$r_{max} = \frac{kg}{\omega^2} = 4{,}9\,\mathrm{m}.$$

Коментар. Както се вижда от израза $a_c = \omega^2 r$, при дадена ъглова скорост центростремителното ускорение на тялото е пропорционално на разстоянието му до оста. Ако $r > r_{max}$, силата на триене не е достатъчно голяма, за да накара тялото да обикаля с такова центростремително ускорение около центъра. Тогава тялото би започнало да се хлъзга спрямо платформата, докато падне от нея (проверете това експериментално, като поставите например малко парче хартия върху повърхността на въртяща се грамофонна плоча).

4.49. С каква максимална скорост v_{max} автомобил с маса m = 1000 kg може да вземе завой с радиус r = 500 m? Коефициентът на триене между гумите на автомобила и пътя е k = 0,5. Разгледайте два случая:

а) Силата на съпротивление на въздуха се пренебрегва.

б) Върху автомобила действа сила на съпротивление на въздуха:

$$F_{съпр} = cv^2,$$

където v е скоростта на автомобила, а c = 2 kg/m е коефициент на пропорционалност.

Приемете, че земното ускорение е $g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$.

Дадено: r = 500 m, m = 1000 kg, g = 10 m/s^2, k = 0,5, c = 2 kg/m

Да се намери: v_{max}

Решение

а) В този случай решението е аналогично на решението на пример 4.48. Реакцията на опората, с която пътят действа върху гумите на автомобила, е:

$$R = mg.$$

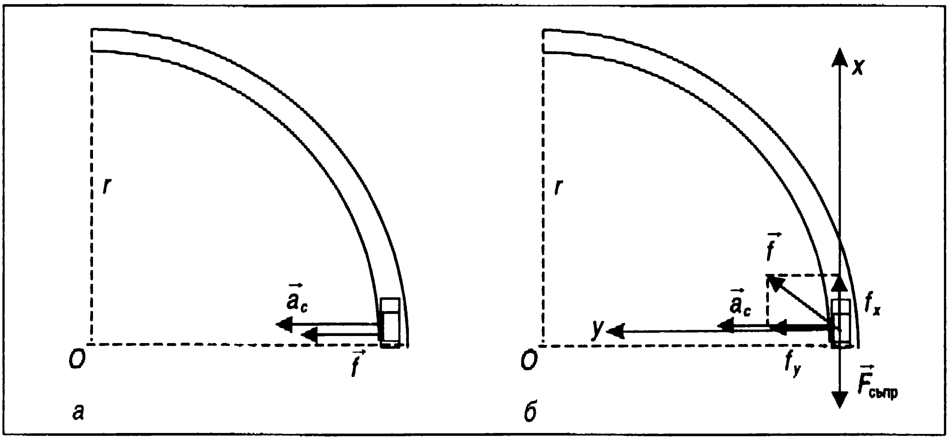
Силата на триене между гумите и пътя е в хоризонтална равнина и е насочена към центъра на завоя (фиг. 4.45, *а*). Тя предизвиква центростремително ускорение на автомобила. От II принцип на Нютон следва

$$m\frac{v^2}{r} = f.$$

Тъй като $f \leq kR$, получаваме:

$$\frac{v^2}{r} \leq kg,$$

$$v_{max} = \sqrt{kgr} = 50\,\mathrm{m/s} = 180\,\mathrm{km/h}.$$



Фиг. 4.45

б) Силата на съпротивление на въздуха действа в посока, противоположна на посоката на скоростта на автомобила (фиг. 4.45, *б*). От II принцип на Нютон следва

$$m\vec{a} = \vec{f} + \vec{F}_{съпр}.$$

Въвеждаме ос x по допирателна към завоя и ос y, насочена към центъра на завоя. Понеже автомобилът се движи с постоянна скорост, неговото тангенциално ускорение $a_t = 0$. Това означава, че силата на триене между гумите и пътя има компонента f_x по оста x, която уравновесява силата на съпротивление на въздуха

$$f_x = cv^2.$$

Следователно ускорението на автомобила има само центростремителна компонента, която се дължи на компонентата f_y на силата на триене

$$m\frac{v^2}{r} = f_y.$$

Следователно големината на силата на триене е

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = v^2\sqrt{c^2 + \frac{m^2}{r^2}}.$$

Тъй като $f \leq kmg$, получаваме

$$v^2\sqrt{c^2+\frac{m^2}{r^2}} \leq kmg,$$

откъдето намираме

$$v_{max} = \frac{\sqrt{kgr}}{\sqrt[4]{1+\left(\frac{cr}{m}\right)^2}} \approx 42\,\text{m/s} \approx 150\,\text{km/h}.$$

Коментар. Както установихме, максималната скорост на автомобила нараства с увеличаване на радиуса на завоя. Това означава, че при завои с голям радиус силата на съпротивление става сравнима със силата на триене между гумите и пътя и оказва съществено влияние върху движението на автомобила. Ако обаче повторите пресмятанията от т. а) и т. б) за завой с радиус 100 m, ще установите, че относителната разлика между двата резултата е едва 1 %. Това означава, че при завои с достатъчно малък радиус силата на съпротивление на въздуха може да бъде пренебрегната.

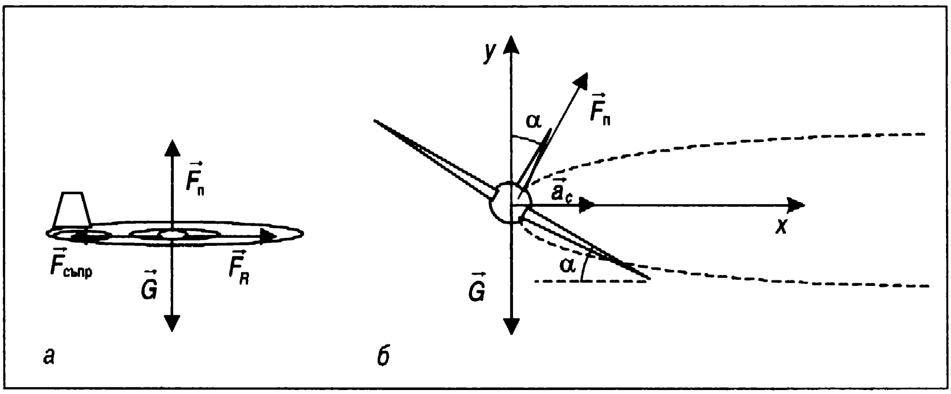
4.50. Под какъв ъгъл спрямо хоризонта трябва да бъдат наклонени крилата на самолет, който се движи със скорост 200 m/s, така че той да направи хоризонтален завой с радиус 10 000 m.

Дадено: $r = 10\,000$ m, $g = 10$ m/s^2, $v = 200$ m/s

Да се намери: α

Решение

Върху всеки самолет действат четири основни сили: силата на тежестта $\vec{G}$, реактивната сила $\vec{F}_R$ от страна на изгорелите газове, които се изхвърлят от двигателя, силата на съпротивление на въздуха $\vec{F}_{съпр}$ и т.нар. подемна сила $\vec{F}_п$, с която въздухът действа перпендикулярно спрямо равнината на крилата (фиг. 4.46, *а*). При полет в хоризонтално направление с постоянна по големина и по посока скорост реактивната сила уравновесява силата на съпротивление на въздуха, а подемната сила – силата на тежестта. Ако самолетът се наклони, както е показано на фиг. 4.46, *б*, посоките на реактивната сила и на силата на съпротивление не се променят, т.е. двете сили отново се уравновесяват. Посоката на



Фиг. 4.46

подемната сила обаче се променя и сключва ъгъл α с вертикалата. При това се появява хоризонтална компонента $F_{пx} = F_п \cos\alpha$ на подемната сила, която е перпендикулярна на скоростта на самолета. Следователно под нейно действие възниква центростремително ускорение, което води до промяна на посоката на скоростта, т.е. самолетът завива. От II принцип на Нютон

$$m\vec{a}_c = \vec{G} + \vec{F}_п.$$

След като проектираме силите върху координатните оси, получаваме:

по x: $$m\frac{v^2}{r} = F_п \sin\alpha,$$

по y: $$0 = F_п \cos\alpha - mg$$

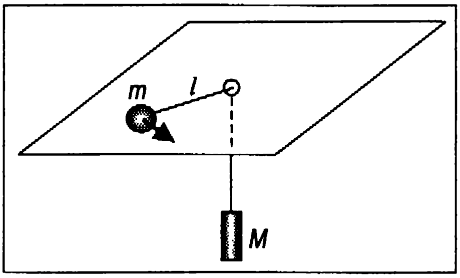
След като изразим силата $F_п$ от второто уравнение и я заместим в първото, намираме:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{gr} = 0{,}4,$$

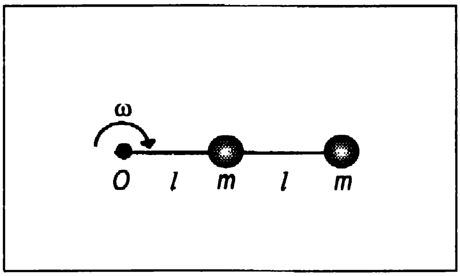
$$\alpha \approx 22°.$$

Задачи

4.51. Върху гладка хоризонтална равнина се намира топче с маса m, което е завързано към единия край на лека нишка. Другият край на нишката преминава през отвор в равнината и към него е завързана теглилка с маса M, която виси свободно (фиг. 4.47). Разстоянието между топчето и отвора е l. Каква скорост v трябва да бъде придадена на топчето, така че то да обикаля по окръжност около отвора?



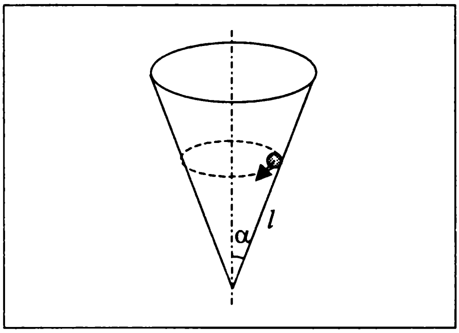
Фиг. 4.47

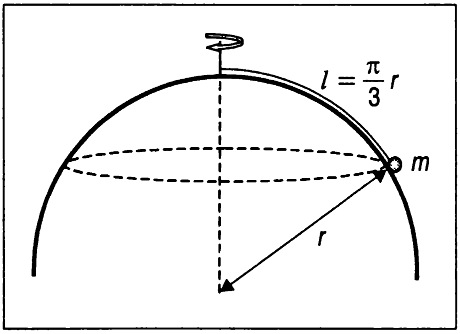


Фиг. 4.48

4.52. Вертикална неподвижна ос O и две топчета с маси m са свързани чрез леки, неразтегливи нишки с еднакви дължини l (фиг. 4.48). Топчетата обикалят в хоризонтална равнина с еднакви ъглови скорости около оста. Намерете силите на опъване на двете нишки.

4.53. Топче обикаля с постоянна скорост v около оста на вертикален конус, обърнат с върха надолу, както е показано на фиг. 4.49 (топчето се движи по вътрешната повърхност на конуса). Ъгълът между образуващата и оста на конуса е α. На какво разстояние l от върха се намира топчето? Триенето между топчето и повърхността на конуса се пренебрегва.





Фиг. 4.49

Фиг. 4.50

4.54. Топче е закрепено с лека и неразтеглива нишка към върха на изпъкнала полусфера (фиг. 4.50). Дължината на нишката е $l = \frac{\pi}{3} r$, където r е радиусът на полусферата. Топчето обикаля с ъглова скорост ω около оста на полусферата. Намерете силата на опъване T на нишката. Каква е най-голямата ъглова скорост ω_{max}, при която топчето ще обикаля, без да се отделя от повърхността на полусферата?

4.55. Пресметнете масата на Слънцето, ако е известно, че Земята обикаля около него по приблизително кръгова орбита с радиус $a = 1{,}5.10^8$ km за време $T = 365$ денонощия.

4.56. С каква скорост и с какъв период обикаля около Земята спътник, който се движи по кръгова орбита на малка височина над земната повърхност? Радиусът на Земята е 6370 km, а ускорението на свободно падане на нейната повърхност – 9,8 m/s^2.

4.57. Пресметнете разстоянието между Земята и Луната, ако приемете, че Луната обикаля по кръгова орбита около центъра на Земята с период 28 денонощия. Можете да използвате данните от задача 4.56.

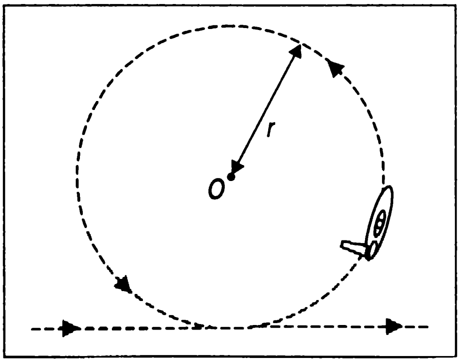
4.58. Планетата Нептун обикаля около Слънцето по приблизително кръгова орбита с радиус, който е 30 пъти по-голям от радиуса на земната орбита. На колко земни години е равен периодът на обикаляне на Нептун около Слънцето?

4.59. Получете израз за периода T, с който спътник обикаля по кръгова орбита близо до повърхността на планета с плътност ρ.

4.60. Велосипедист се движи със скорост 15 km/h по мокър път. Намерете най-малкия радиус на завоя, който може да направи велосипедистът, ако коефициентът на триене между гумите и пътя е 0,3.

4.61. Самолет прави лупинг с радиус 500 m във вертикална равнина (фиг. 4.51). В най-ниската част от лупинга скоростта на самолета е 100 m/s, а в най-високата – 70 m/s. Намерете силата на натиск, която пилотът упражнява върху седалката в най-високата и в най-ниската част на лупинга. Масата на пилота е 60 kg, а ускорението на свободно падане – 9,8 m/s^2.

4.62. Самолет, който лети със скорост 300 m/s, прави завой с радиус 10 000 m в хоризонтална равнина. Намерете силата на натиск, която пилотът упражнява върху седалката по време на завоя. Масата на пилота е 60 kg.



Фиг. 4.51

Закон за запазване на импулса

Импулсът $\vec{p}$ на тяло е физична величина, равна на произведението от масата m на тялото и неговата скорост $\vec{v}$:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Съгласно с втория принцип на механиката

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t,$$

където $\vec{F}$ е силата, действаща на тялото в продължение на време Δt, и тя води до изменение на импулса му с $\Delta\vec{p}$. Ако на тялото не действа сила:

$$\Delta\vec{p} = 0,$$

т.е. при движението му импулсът $\vec{p}$ не се изменя **(закон за запазване на импулса на тялото)**. В случаите, когато някоя от компонентите на силата $\vec{F}$ е нула, например $F_x = 0$, а другите две – F_y, F_z, са различни от нула, при движението на тялото се запазва само компонентата p_x:

$$p_x = \text{const}.$$

Понятието импулс на система широко се използва при описание на движението на няколко взаимодействащи си тела. Импулсът се определя като сума от импулсите на отделните тела във всеки момент. За система от две взаимодействащи си тела 1 и 2 импулсът е

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2,$$

където $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$, $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$. Съгласно с втория принцип на механиката изменението на импулса $\Delta\vec{p}$ на системата с времето се определя само от действието на външните сили

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}_{вн}\Delta t,$$

където

$$\vec{F}_{вн} = \vec{F}_{вн,1} + \vec{F}_{вн,2}.$$

Когато $\vec{F}_{вн} = 0$, телата от системата се движат така, че импулсът ѝ

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}$$

(закон за запазване на импулса на системата). В случаите, когато някоя от компонентите на резултантната външна сила е нула, например $F_{вн,x} = 0$, а другите компоненти са различни от нула, се запазва само x-тата компонента на импулса на системата.

Използването на закона за запазване на импулса на система от тела дава възможност да се оцени резултатът от взаимодействието им, без то да се описва подробно.

ПРИМЕРИ

4.63. При образуването на влакова композиция железопътен вагон с маса m_1, чиято скорост е v_0, се сблъсква с неподвижен вагон с маса m_2 и бива скачен към него. Каква е скоростта на скачените вагони? Решете задачата, като използвате:

а) уравненията на движение на вагоните (динамичен подход);

б) закона за запазване на импулса.

Дадено: m_1, m_2, v_0
Да се намери: v
Решение

а) По време на сблъсъка на вагоните, докато трае скачването им, вагоните си действат с равни по големина и противоположни по посока сили (трети принцип на механиката). За да използваме уравненията на движение, трябва да посочим силите на взаимодействие между вагоните. Най-простото възможно взаимодействие е, че по време на сблъсъка, докато става скачването, силите са постоянни и равни по големина на F. Първият вагон се движи равнозакъснително с ускорение $a_1 = \frac{F}{m_1}$, а вторият – равноускорително с ускорение $a_2 = \frac{F}{m_2}$. След време t от началото на сблъсъка скоростите на вагоните са съответно:

$$v_1 = v_0 - a_1 t = v_0 - \frac{F}{m_1}t,$$

$$v_2 = a_2 t = \frac{F}{m_2}t.$$

Процесът на скачването приключва след време τ от началото на сблъсъка, когато скоростите на вагоните се изравнят:

$$v_0 - \frac{F}{m_1}\tau = \frac{F}{m_2}\tau,$$

откъдето намираме

$$F\tau = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}v_0.$$

След това вагоните се движат с постоянна скорост

$$v = \frac{F\tau}{m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_0$$

и не си взаимодействат.

Коментар. Направеното предположение, че силите на взаимодействие между вагоните са постоянни по време на скачването им, е твърде изкуствено. Може да се използва по-реалистичен модел с променящи се по големина сили, който след много по-дълги пресмятания води до същия резултат. Всъщност резултатът за крайната скорост на вагоните не зависи от конкретното взаимодействие, в което можем да се убедим, като използваме закона за запазване на импулса.

б) Силите на взаимодействие са вътрешни за системата от двата вагона и те не променят общия им импулс. Тъй като в хоризонтално направление на вагоните не действат външни сили, пълният импулс на системата остава постоянен. Преди сблъсъка импулсът на вагоните е:

$$p' = m_1 v_0 + 0 = m_1 v_0.$$

След скачването вагоните се движат с една и съща скорост v и

$$p'' = m_1 v + m_2 v = (m_1 + m_2)v.$$

От закона за запазване на пълния импулс

$$p' = p''$$

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_0.$$

4.64. Две метални топчета с маси съответно $m_1 = 2$ g и $m_2 = 4$ g се движат в хоризонтална равнина със скорости $v_1 = 0{,}6$ m/s и $v_2 = 0{,}4$ m/s, чиито посоки са взаимно перпендикулярни. Определете големината и посоката на общия им импулс.

Дадено: $m_1 = 2$ g, $m_2 = 4$ g, $v_1 = 0{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_2 = 0{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Да се намери: p

Решение

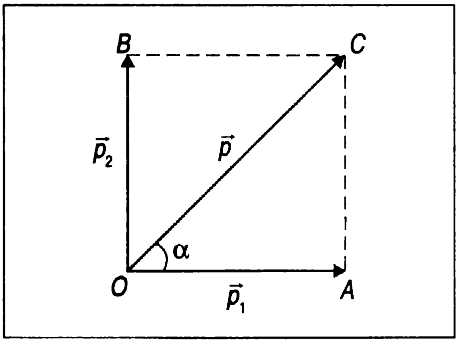
На фиг. 4.52 са показани векторите $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, които сключват ъгъл 90°. Общият импулс на топчетата

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2,$$

по правилото на успоредника е диагонал на успоредника $OACB$ с посока от т. O към т. C. Тъй като двата импулса по големина са

$$p_1 = m_1 v_1 = 1{,}2\ \frac{\text{g.m}}{\text{s}},$$

$$p_2 = m_2 v_2 = 1{,}6\ \frac{\text{g.m}}{\text{s}}$$



Фиг. 4.52

и представляват катети в правоъгълния триъгълник OAC, от Питагоровата теорема следва

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2,$$

откъдето намираме

$$p = \sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2} = 2\ \frac{\text{g.m}}{\text{s}} = 2.10^{-3}\ \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}.$$

Посоката на общия импулс $\vec{p}$ спрямо $\vec{p}_1$ се определя от ъгъла α. От същия правоъгълен триъгълник имаме

$$\sin\alpha = \frac{p_2}{p} = 0{,}8$$

и следователно: $\alpha \approx 59°$.

4.65. Тяло, движещо се със скорост u, се разпада на две части, чиито маси m_1 и m_2 са свързани с отношението $\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{3}$. Скоростта на по-малката част е $v_1 = u$ и е перпендикулярна на началната скорост. Каква е големината на скоростта v_2 на втората част от тялото и какъв ъгъл с началната скорост сключва тя?

Дадено: u, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{3}$

Да се намери: v_2, α

Решение

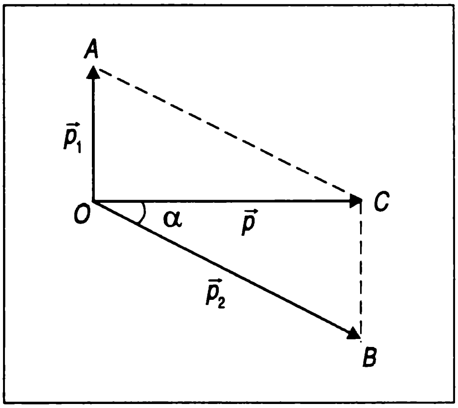
Тялото се разпада на две части поради наличието на вътрешни сили. Те не влияят върху импулса на системата, която до разпадането е тяло с маса $M = m_1 + m_2$ и скорост $\vec{u}$, а след разпадането е съвкупност от две тела с маси съответно m_1 и m_2 и скорости $\vec{v}_1$

и $\vec{v}_2$. Поради липса на външни сили импулсът на системата не се променя при разпадането. На фиг. 4.53 е показана диаграмата на импулсите $\vec{p} = M\vec{u}$, $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ и $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$, като е изпълнен законът за запазване на импулса:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Геометрически това означава, че векторът $\vec{p}$ е диагонал на успоредник със страни $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$. От правоъгълния триъгълник *OCB* следва

$$p_2 = \sqrt{p^2 + p_1^2}.$$



Фиг. 4.53

Като се отчете, че големините на импулсите са:

$$p = Mu, \quad p_1 = m_1v_1 = \frac{2}{5}Mu, \quad p_2 = m_2v_2 = \frac{3}{5}Mv_2,$$

намираме $v_2 = \dfrac{\sqrt{29}}{3}u \approx 1{,}8u$.

За ъгъла α, който векторът $\vec{p}_2$ сключва с $\vec{p}$, имаме

$$\sin\alpha = \frac{p_1}{p_2} \approx 0{,}37,$$

откъдето намираме $\alpha \approx 27°$.

4.66. Количка с пясък има маса M = 10 kg и се движи по хоризонтален релсов път със скорост v_1 = 1 m/s. В пясъка попада гюле с маса m = 2 kg и хоризонтална скорост v_2 = 6 m/s (фиг. 4.54). В каква посока и с каква скорост ще се движи количката с гюлето в нея?

Дадено: M = 10 kg, m = 2 kg, v_1 = 1 m/s, v_2 = 6 m/s
Да се намери: $\vec{u}$
Решение

Върху гюлето и количката не действат външни сили в хоризонтална посока. Следователно импулсът на системата в хоризонтална посока се запазва. Преди гюлето да попадне в количката, импулсът е

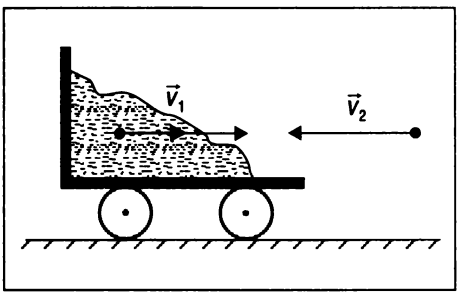
$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = M\vec{v}_1 + m\vec{v}_2.$$

След попадението той трябва да остане непроменен

$$\vec{p} = (M + m)\vec{u},$$

където $\vec{u}$ е скоростта на количката с гюлето. Тогава

$$M\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = (M + m)\vec{u}.$$



Фиг. 4.54

Нека приемем за положителна първоначалната посока на движение на количката. Проектираме горното равенство върху тази ос:

$$Mv_1 - mv_2 = (M + m)u,$$

където проекцията u на вектора на скоростта $\vec{u}$ върху тази ос може да бъде положително число, отрицателно число или нула. По знака ще определим и посоката на движение на количката с гюлето в нея. Тогава имаме

$$u = \frac{Mv_1 - mv_2}{M + m} = -0{,}17\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Знакът минус показва, че количката с гюлето ще се движат в посока, противоположна на първоначалната, със скорост $0{,}17\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

4.67. Две лодки, във всяка от които се намира товар с маса m, се движат една срещу друга по успоредни курсове и с еднаква по големина скорост v. Когато лодките се изравнят, от едната лодка в другата се прехвърля товар с маса m и веднага този товар се връща в първата. В друг случай товарите с маса m се прехвърлят едновременно от едната лодка в другата. Масата на всяка лодка с човека в нея е M.

а) Намерете скоростите на лодките във всеки от двата случая.

б) В кой от случаите скоростта на лодките е по-голяма?

Дадено: M, m, v

Да се намери: u_1, u_2, u_1', u_2'

Решение

а) При първия случай по направление на курса на лодките не действат външни сили и е валиден законът за запазване на импулса при прехвърлянето на товара. Когато първоначално се прехвърля товар от втората лодка на първата имаме

$$(M + m)v - mv = (M + 2m)u_1,$$

където $u_1 = \dfrac{M}{M + 2m}v$

е скоростта на лодка 1. При изхвърлянето на товара импулсът на лодката 2 намалява с mv от $(M = m)v$ до Mv и тя продължава да се движи със скорост v. При обратното прехвърляне на товара от лодка 1 на лодка 2 първата продължава да се движи със скорост u_1, а от закона за запазване на импулса за лодка 2 и товара имаме

$$Mv - mu_1 = (M + m)u_2,$$

където $u_2 = \dfrac{Mv - mu_1}{M + m} = \dfrac{Mv}{M + 2m} = u_1$

е крайната скорост на лодка 2.

Във втория случай в момента на хвърляне на товара от коя да е лодка скоростта на лодката не се променя и е v. В момента на попадане на товара, хвърлен от другата лодка, имаме

$$Mv - mv = (M + m)u',$$

$$u' = \frac{M - m}{M + m}v,$$

откъдето следва, че скоростите на лодките след обмяна на товарите са равни на u' по големина и имат противоположни посоки.

б) И при двата случая на обмяна на товар с маса m между лодките двете лодки имат една и съща по големина скорост. В първия случай тя е

$$u = \frac{M}{M + 2m} v,$$

а във втория –

$$u' = \frac{M - m}{M + m} v.$$

Скоростите се определят от множителя $\alpha = \frac{M}{M + 2m}$, $\beta = \frac{M - m}{M + m}$ и първоначалната скорост v. Възможни са три случая: $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$, които съответстват на $u < u'$, $u = u'$, $u > u'$. Ще предположим, че е вярно неравенството $\alpha < \beta$, т.е.

$$\frac{M}{M + 2m} < \frac{M - m}{M + m}.$$

След преобразуване имаме

$$M(M + m) < (M - m)(M + 2m),$$

$$0 < -2m^2,$$

което е невярно неравенство, защото отрицателното число $-2m^2$ не е по-голямо от нула. Следователно допускането $\alpha < \beta$ не е вярно. Ако допуснем $\alpha > \beta$, ще получим вярното неравенство

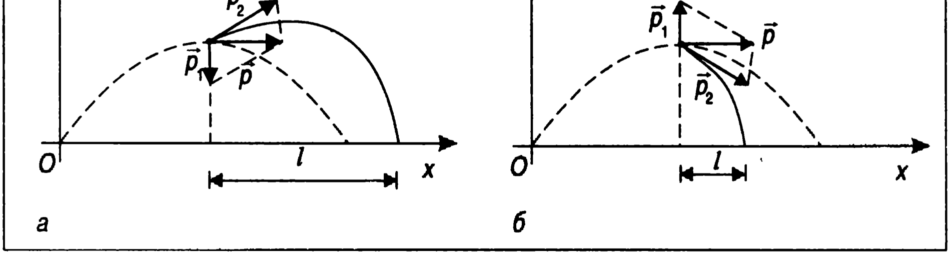
$$2m^2 > 0.$$

Следователно за скоростите се получава $u > u'$.

4.68. На височина $h = 80$ m над земната повърхност скоростта на снаряд е хоризонтална и по големина е $v_0 = 100$ m/s. Снарядът се взривява на две части (шрапнели) с равни маси. Първият шрапнел пада на земята след време $t_1 = 2$ s непосредствено под мястото на взрива. Определете далечината l на полета на втория шрапнел.

Дадено: $h = 80$ m, $v_0 = 100$ m/s, $t_1 = 2$ s
Да се намери: l
Решение

За да определим далечината на полета на втория шрапнел, трябва да знаем неговата хоризонтална скорост непосредствено след взрива. В този случай можем да използваме закона за запазване на импулса, защото външната по отношение на системата сила на тежестта за краткото време на взрива Δt има пренебрежим импулс $mg\Delta t$. Възможни са два случая (фиг. 4.55, *а*, *б*), които се различават само по посоката на импулса на шрапнела 1.



Фиг. 4.55

За да намерим големината на скоростта v_1 на шрапнела 1 (фиг. 4.55, *а*), ще използваме изменението на координата $y_1(t)$:

$$y_1(t) = h + v_{1y}t - \frac{gt^2}{2},$$

като $v_{1y} = -v_1$. При $t = t_1$, $y_1(t_1) = 0$, откъдето получаваме

$$v_1 = \frac{h - \frac{gt_1^2}{2}}{t_1} = 30\ \frac{\text{m}}{\text{s}} > 0,$$

което показва, че този случай се наблюдава в действителност. При същите разглеждания за големината на скоростта v_1 в случая, показан на фиг. 4.55, *б*, ще получим отрицателно число, което няма физичен смисъл. Дължината на полета на втория шрапнел е

$$l = v_{2x}t_2.$$

За да определим скоростта v_{2x} и времето t_2 на полета, ще използваме проекциите на векторното равенство, изразяващо закона за запазване на импулса:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2,$$

по x: $\quad p = p_{1x} + p_{2x} = p_{2x}$,

по y: $\quad 0 = p_{1y} + p_{2y}$.

Като отчетем, че $p = mv_0$, $p_{2x} = \frac{m}{2}v_{2x}$, от проекциите по x получаваме

$$v_{2x} = 2v_0.$$

От друга страна, времето на полета t_2 ще намерим по координатата $y_2(t)$:

$$y_2(t) = h + v_2t - \frac{gt^2}{2}.$$

Като отчетем, че $p_{1y} = \frac{m}{2}v_{1y}$, $p_{2y} = \frac{m}{2}v_{2y}$, намираме

$$v_{2y} = -v_{1y} = v_1.$$

Тогава имаме

$$y_2(t) = h + v_1t - \frac{gt^2}{2}$$

и от условието $y_2(t_2) = 0$ получаваме квадратното уравнение

$$t_2^2 - 2\frac{v_1}{g}t_2 - \frac{2h}{g} = 0.$$

От решенията му физичен смисъл има само коренът

$$t_2 = \frac{1}{g}\left(v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2hg}\right) = 8\ \text{s}.$$

Тогава за далечината на полета получаваме

$$l = 2v_0t_2 = 1600\ \text{m}.$$

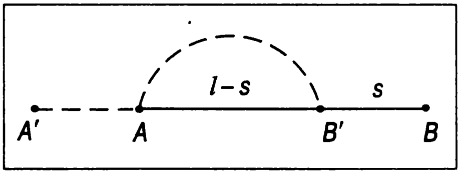
4.69. Жаба с маса m седи в края на дъска с маса M и дължина l. Дъската е неподвижна на повърхността на водата във водоем. С каква минимална по големина скорост v трябва да отскочи жабата, за да може да попадне точно в другия край на дъската?

Дадено: m, M, l

Да се намери: v

Решение

Когато жабата отскача със скорост v под ъгъл α спрямо хоризонта, максимална далечина на полета се постига при $\alpha = 45°$. Нейната хоризонтална проекция е $v_x = v\cos\alpha = \frac{v}{\sqrt{2}}$. При отскачането на жабата дъската се задвижва в



Фиг. 4.56

противоположна посока и за времето на полета t дъската изминава разстояние s (фиг. 4.56). Тогава, за да попадне в края на дъската, далечината на полета на жабата трябва да бъде $l - s$, т.е.

$$l - s = v_x t = \frac{v}{\sqrt{2}}t.$$

Разстоянието, изминато от дъската по повърхността на водата, е

$$s = ut.$$

Скоростта на дъската u може да се намери чрез използването на закона за запазване на импулса в хоризонтална посока, тъй като в това направление не действат външни сили. Началният импулс на дъската и жабата за наблюдател от брега е нула. Тогава след отскачането на жабата имаме

$$0 = Mu - m\frac{v}{\sqrt{2}},$$

откъдето намираме $u = \frac{m}{M}\frac{v}{\sqrt{2}}$.

Времето на полета t намираме от закона за движение

$$y(t) = \frac{v}{\sqrt{2}}t - \frac{gt^2}{2} = 0,$$

откъдето $t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{\sqrt{2}}{g}v.$

Първият корен определя момента на скока, а вторият – момента, в който жабата достига другия край на дъската.

След като заместим s, u и t с техните равни, намираме

$$l - \frac{m}{M}\frac{v}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}v}{g} = \frac{v}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}v}{g},$$

откъдето следва $v = \sqrt{\frac{gl}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)}}$.

Задачи

4.70. Автомобил с маса $m = 1$ t се движи по хоризонтален път със скорост $v = 108$ km/h. Намерете времето Δt за спиране, ако спирачната сила е $F = 10$ kN.

4.71. Две метални сфери, всяка с маса 2 kg, се движат праволинейно в хоризонтална равнина с еднакви по големина скорости $v = 0{,}6$ m/s. Намерете импулса на системата от двете сфери, ако:

а) те се движат по една права една срещу друга;

б) те се движат по една права една след друга;

в) ъгълът между посоките на скоростите е $\alpha = 120°$.

4.72. Три железопътни вагона се намират върху релсите на неголямо разстояние един от друг и имат маси, които се отнасят както 1:2:3. За да се образува композиция от вагоните, на първия се придава скорост $v_0 = 3$ m/s. Каква скорост ще имат вагоните след композирането им?

4.73. Железопътна платформа с намиращо се върху нея оръдие се движи със скорост $v_1 = 18$ km/h. Общата им маса е $M = 200m$. От оръдието е изстрелян снаряд с маса m и скорост $v_2 = 800$ m/s спрямо платформата. Определете скоростта на платформата, ако снарядът е изстрелян:

а) по посока на движението;

б) под ъгъл $\alpha = 60°$ спрямо хоризонта по посока на движението.

4.74. Движещо се тяло се разпада на две части със импулси съответно $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, насочени под ъгъл θ един спрямо друг. Определете големината на импулса p на тялото.

Упътване. При решаване на задачата използвайте равенството

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2.$$

4.75. Когато скоростта на хвърлена граната е хоризонтална и по големина е $v_0 = 10$ m/s, гранатата се взривява на два шрапнела съответно с маси $m_1 = 1$ kg и $m_2 = 1{,}5$ kg. Непосредствено след взрива скоростта на шрапнела с по-голяма маса е хоризонтална и по големина е $v_2 = 25$ m/s. Определете големината и посоката на скоростта на шрапнела с по-малка маса.

4.76. Три лодки с равни маси M се движат една след друга с еднаква скорост v. От средната лодка на другите две едновременно се прехвърлят товари с маса m и скорост u спрямо лодките. Каква скорост ще имат трите лодки след прехвърляне на товарите?

4.77. Космически кораб има скорост v преди отделяне на последната степен на ракетата носител. След отделянето ѝ скоростта на кораба става $1{,}01v$, като отделената степен се отдалечава от кораба със скорост $0{,}04v$. Определете масата на последната степен на ракетата носител, ако масата на кораба е m_0.

** **4.78.** Човек с маса $m = 70$ kg се намира на кърмата на неподвижна лодка с дължина $l = 5$ m и маса $M = 280$ kg. Човекът преминава от кърмата на носа на лодката. Намерете на какво разстояние s ще се премести лодката спрямо водата.

Упътване. Приемете, че скоростта на човека спрямо водата е $v_1 = \frac{l}{t}$, а на лодката – $v_2 = \frac{s}{t}$.

Работа и енергия. Закон за запазване на енергията

Освен с времевата характеристика импулс на силата $\vec{F}\Delta t$ действието на всяка сила се описва и с пространствената характеристика механична работа A. По определение постоянна сила $\vec{F}$, която действа на дадено тяло (материална точка), извършва работа при неговото преместване:

$$A = F\Delta r\cos\alpha,$$

където F е големината на силата, Δr – големината на преместването, а α – ъгълът между векторите $\vec{F}$ и $\Delta\vec{r}$. При праволинейно постъпателно движение големината на преместването Δr съвпада с изминатия път s.

Една сила $\vec{F}$ не върши работа, когато ъгълът $\alpha = 90°$, т.е. силата е перпендикулярна на преместването. Ако на тялото действат няколко сили, пълната извършена работа е сума от извършената работа от всяка сила поотделно.

Когато при преместване на тялото действа сила, изменяща се по големина, можем да използваме приближена формула. Заменяме променливата сила с постоянна, равна на нейната средна стойност:

$$F_{ср} = \frac{F_{нач} + F_{кр}}{2},$$

и пресмятаме нейната работа.

Работата на дадена сила е свързана с изменението на кинетичната енергия на тялото. Кинетичната енергия $E_к$ на материална точка с маса m и скорост v се определя с израза

$$E_к = \frac{mv^2}{2}.$$

Изменението на кинетичната енергия $\Delta E_к = E_{к,кр} - E_{к,нач}$ е равно на работата A на всички действащи на тялото сили, т.е.

$$\Delta E_к = A.$$

Това твърдение се нарича **теорема за кинетичната енергия**.

По извършената работа силите могат да бъдат разделени на две групи. Силата се нарича **консервативна**, ако извършената от нея работа **не зависи** от траекторията на материалната точка, а се определя само от началното и крайното положение. Тогава може да се въведе **потенциална енергия** на материалната точка, която е свързана с положението ѝ в пространството. Тя се задава с израза

$$A = E_{п,нач} - E_{п,кр} = -\Delta E_п,$$

където $E_{п,нач}$ и $E_{п,кр}$ са началната и крайната потенциална енергия. Силата на тежестта $\vec{G}$ и силата на еластичност $\vec{F}$ са консервативни. Съответните формули, които задават потенциалната енергия в двата случая, са:

$$G = mg \quad \rightarrow \quad E_п = mgh,$$

$$F = -kx \quad \rightarrow \quad E_п = \frac{kx^2}{2},$$

където h е височината над земната повърхност, а x – отклонението от равновесното положение.

Когато извършената от дадена сила работа зависи от траекторията, силата се нарича **неконсервативна**. Типичен пример за неконсервативни сили са силите на триене и на съпротивление. Ако разделим силите, които действат на едно тяло (материална точка), на консервативни и неконсервативни, имаме

$$\Delta E_{к} = A_{конс} + A_{неконс} = -\Delta E_{п} + A_{неконс}.$$

Тогава можем да запишем

$$\Delta E_{к} + \Delta E_{п} = A_{неконс}.$$

Като въведем величината **пълна механична енергия**

$$E = E_{к} + E_{п},$$

получаваме

$$\Delta E = A_{неконс},$$

т.е. изменението на пълната механична енергия ΔE е равно на работата на неконсервативните сили. Ако $A_{неконс} = 0$, пълната механична енергия не се променя при движението на тялото:

$$E = E_{к} + E_{п} = \text{const}.$$

Това твърдение се нарича **закон за запазване на пълната механична енергия**. Използването на величината механична енергия дава възможност чрез зависимостите, които тя удовлетворява, да се решават различни динамични задачи. Този метод е известен като **енергетичен подход** в механиката.

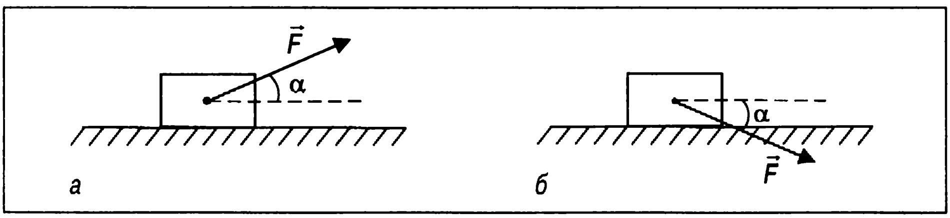
ПРИМЕРИ

4.79. Тяло с маса m = 5 kg се движи под действие на сила F = 10 N, която сключва ъгъл α = 30° с равнината (фиг. 4. 57, *а, б*). Коефициентът на триене между тялото и равнината е k = 0,1. Определете работата, извършена от силата $\vec{F}$ и от силата на триене $\vec{f}$, ако тялото изминава по равнината разстояние s = 2 m.

Дадено: m = 5 kg, F = 10 N, α = 30°, k = 0,1, s = 2 m
Да се намери: A_F, A_f
Решение

Работата, извършена от силата $\vec{F}$, е

$$A_F = Fs\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}Fs \approx 17 \text{ J}.$$



Фиг. 4.57

Посоката на силата на триене $\vec{f}$ е противоположна на посоката на движение на тялото и

$$A_f = -fs,$$

където $f = kN$, а N е нормалният натиск върху равнината, породен от тялото. За определянето на N ще отчетем, че според третия принцип на механиката равнината действа на тялото със силата $\vec{R}$ (реакция на опората), равна по големина и противоположна по посока на нормалния натиск, т.е. имаме също $f = kR$. За определянето на R ще отчетем факта, че тялото не се движи във вертикална посока и следователно резултантната сила в тази посока е нула (фиг. 4. 58, *а*):

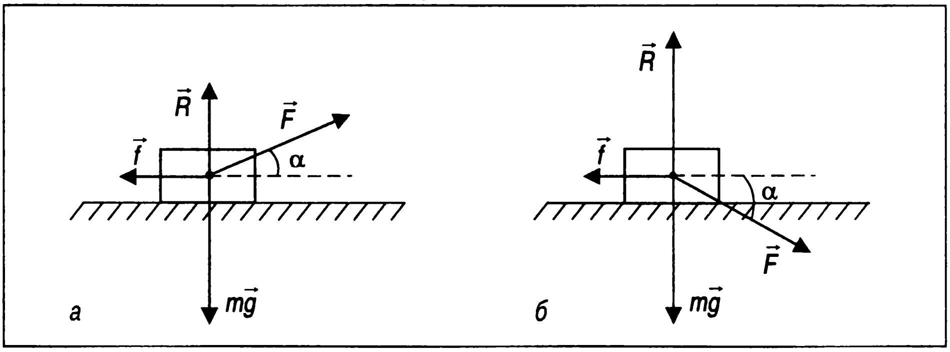
$$mg - F\sin\alpha - R = 0,$$

откъдето намираме

$$R = mg - F\sin\alpha.$$

Тогава имаме

$$A_f = -k(mg - F\sin\alpha)s = -9\ \text{J}.$$



Фиг. 4.58

Във втория случай (фиг. 4. 58, *б*)

$$mg + F\sin\alpha - R = 0,$$

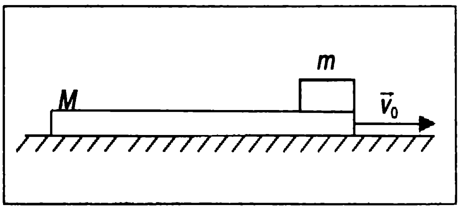
откъдето намираме

$$R = mg + F\sin\alpha,$$

$$A_f = -k(mg + F\sin\alpha)s = -11\ \text{J}.$$

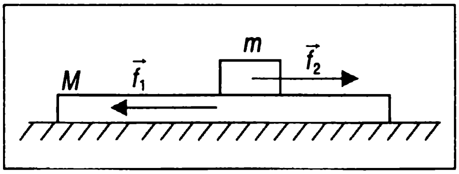
Коментар. Обърнете внимание, че при един и същ коефициент на триене силата на триене f има различни стойности, тъй като се променя нормалният натиск.

4.80. В края на дъска с дължина L и маса M се намира малко трупче с маса m (фиг. 4. 59). Дъската може да се хлъзга без триене по хоризонтална равнина. Коефициентът на триене при хлъзгане между трупчето и дъската е k. Каква хоризонтална скорост v_0 след рязък удар трябва да се придаде на дъската, за да може тя да изскочи изпод трупчето?



Фиг. 4.59

Дадено: M, L, m, k
Да се намери: v_0
Решение



Фиг. 4.60

При резкия удар дъската получава скорост v_0 спрямо земята, като тя и трупчето за краткото време на удара не променят положението си. Освен това можем да приемем, че трупчето не придобива скорост спрямо земята.

След резкия удар поради силите на взаимно триене (фиг. 4.60) дъската се движи спрямо земята (неподвижната равнина) равнозакъснително, а трупчето – равноускорително. Според третия принцип на механиката силите $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ имат равни големини и противоположни посоки, като

$$f_1 = f_2 = kmg.$$

Ако началната скорост на дъската v_0 не е достатъчно голяма, може да настъпи момент, при който трупчето и дъската имат еднаква скорост v. Те ще се движат като едно цяло и дъската няма да изскочи изпод трупчето. Ако началната скорост на дъската е достатъчно голяма, за времето, докато трупчето се хлъзга по дължината L на дъската, скоростите им не успяват да се изравнят и дъската изскача изпод него.

Нека приемем, че при начална скорост v_0 на дъската трупчето изминава по нея разстояние s до момента на прекратяване на хлъзгането му. От този момент нататък трупчето и дъската се движат със скорост v. Тъй като след резкия удар в хоризонтално направление на системата дъска–трупче не действат външни сили, импулсът ѝ се запазва, т.е.

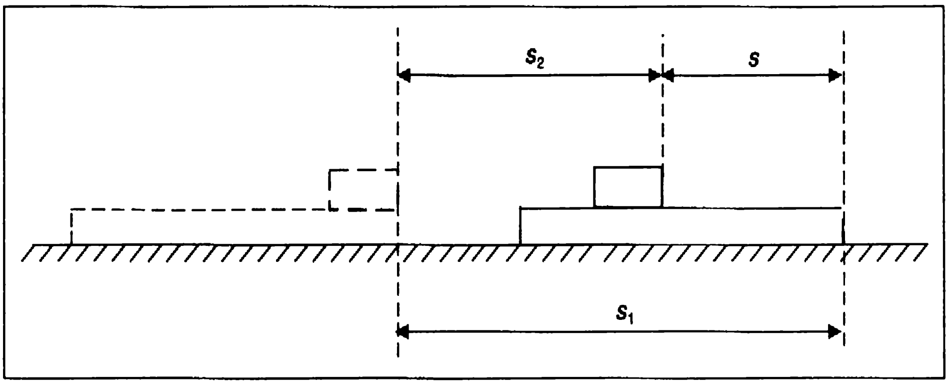
$$Mv_0 = (M + m)v,$$

откъдето намираме

$$v = \frac{M}{M + m} v_0.$$

От друга страна, изменението на кинетичната енергия на всяко от телата можем да свържем с работата, извършена съответно от силите $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$, и по този начин да намерим връзка между v_0 и s. Както се вижда от фиг. 4.61, до изравняването на скоростите дъската изминава разстояние s_1, а трупчето – разстояние s_2, като

$$s = s_1 - s_2.$$



Фиг. 4.61

По формулата за изменението на кинетичната енергия

$$\Delta E_{к,1} = \frac{Mv^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} = A_1,$$

$$\Delta E_{к,2} = \frac{mv^2}{2} - 0 = A_2,$$

където A_1 е работата, извършена от силите, действащи върху дъската, а A_2 – от силите, действащи върху трупчето. Тъй като силите на тежестта и силите на реакция са перпендикулярни на преместването, те не вършат работа и

$$A_1 = -f_1 s_1 = -kmgs_1, \quad A_2 = f_2 s_2 = kmgs_2.$$

Следователно имаме

$$\frac{Mv^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} = -kmgs_1,$$

$$\frac{mv^2}{2} = kmgs_2.$$

След почленно събиране на равенствата получаваме

$$\frac{(M+m)v^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} = -kmgs.$$

Като заместим v с неговото равно, намираме

$$v_0 = \sqrt{2kgs\left(1 + \frac{m}{M}\right)},$$

т.е.

$$v_0 \sim \sqrt{s}.$$

Началната скорост е толкова по-голяма, колкото по-голямо разстояние измине трупчето! Максималната начална скорост $v_{0,max}$, при която трупчето може да остане върху дъската (вж. 4,33), е

$$v_{0,max} = \sqrt{2kgL\left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

Следователно дъската ще изскочи изпод трупчето при условието (сравнете с 4.33)

$$v_0 > v_{0,max} = \sqrt{2kgL\left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

4.81. Шейна, която се движи по хоризонтален лед със скорост $v = 6$ m/s, изскача на асфалт. Какъв път ще измине шейната до пълното си спиране, ако дължината на плазовете е $L = 2$ m, а коефициентът на триене при движение по асфалт е $k = 1$?

Дадено: $v = 6$ m/s, $L = 2$ m, $k = 1$

Да се намери: s

Решение

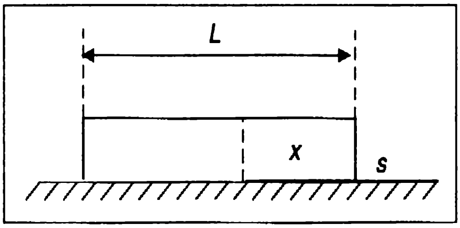
Когато предната част на шейната изскача на асфалта, започва да действа сила на триене $\vec{f}$ и шейната променя скоростта си. Изминатият по асфалта път ще определим по формулата за изменение на кинетичната енергия на шейната до нейното спиране

$$\Delta E_к = A_f,$$

където

$$\Delta E_к = E_{к,2} - E_{к,1} = 0 - \frac{mv^2}{2} = -\frac{mv^2}{2},$$

а A_f е работата, извършена от силата $\vec{f}$. Тя е отрицателна, тъй като силата $\vec{f}$ е противоположна по посока на скоростта на шейната, т.е. $A_f = -|A_f|$. За да определим големината на силата на триене $f = kN$, ще изследваме подробно промяната на натиска N с навлизането x на шейната върху асфалта (фиг. 4. 62). Нормалният натиск представлява теглото P_x на навлязлата върху асфалта част от шейната:



Фиг. 4.62

$$N = P_x = m_x g = \rho V_x g = \rho Sxg = \rho SLg\frac{x}{L} = mg\frac{x}{L},$$

където m е пълната маса на шейната. Когато шейната навлезе изцяло върху асфалта,

$$N = P = mg.$$

На фиг. 4. 63 е показана графиката на силата на триене в зависимост от разстоянието x. Както се вижда, силата на триене не е постоянна по големина. За пресмятането на $|A_f|$ можем да постъпим по следния начин. В участъка $0 \le x \le L$ ще заменим истинската променлива сила f с постоянна сила $f_{ср}$, като

$$f_{ср} = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{0 + kmg}{2} = \frac{1}{2}kmg.$$

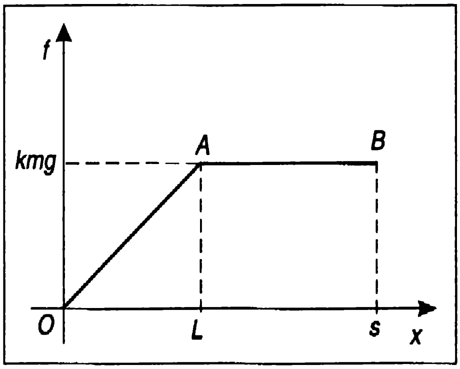
Тази сила зависи от x линейно и на дадения участък извършва същата работа, както променливата сила f. Следователно за $|A_f|$ получаваме

$$|A_f| = f_{ср}L + kmg(s - L) = kmgs - \frac{1}{2}kmgL.$$

След заместване имаме

$$-\frac{mv^2}{2} = -|A_f|,$$

$$s = \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{kg} + L\right) \approx 2{,}8\ \text{m}.$$



Фиг. 4.63

4.82. Момче се спуска с шейна от височина h по склон, който сключва ъгъл α с хоризонта. Определете:

а) скоростта v на шейната в подножието на склона;

б) разстоянието s, което ще измине шейната по хоризонталния участък (фиг. 4. 64).

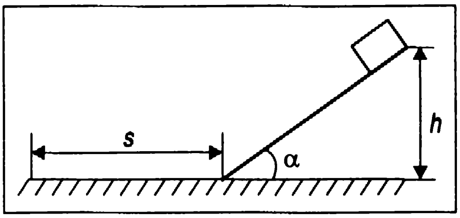
Коефициентът на триене между плазовете на шейната и снега е k. Направете числена оценка на получените величини, като използвате реалистични стойности за α, h и k.

Дадено: h, α, k

Да се намери: v, s

Решение

Задачата се решава най-лесно, като се използва законът за изменение на механичната енергия на шейната с момчето. На шейната действат три сили – сила на тежестта $m\vec{g}$, насочена вертикално надолу, сила на реакция на



Фиг. 4.64

опората $\vec{R}$, перпендикулярна на скоростта, и сила на триене $\vec{f}$, която има посока, противоположна на скоростта във всеки момент от движението. Както знаем, изменението на кинетичната енергия е

$$\Delta E_к = E_{к,2} - E_{к,1} = A_G + A_R + A_f.$$

Тук работата на силата на тежестта

$$A_G = E_{п,1} - E_{п,2},$$

се изразява чрез потенциалната енергия $E_п = mgh$. Реакцията на опората $\vec{R}$ не върши работа, тъй като винаги е перпендикулярна на преместването. Тогава имаме

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A_f,$$

където механичната енергия на шейната е

$$E = E_к + E_п = \frac{mv^2}{2} + mgh,$$

а A_f е работата, извършена от силата на триене.

а) началната механична енергия е

$$E_1 = 0 + mgh = mgh,$$

а крайната механична енергия в подножието на склона –

$$E_2 = \frac{mv^2}{2} + 0 = \frac{mv^2}{2}.$$

Тогава имаме:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{mv^2}{2} - mgh.$$

Работата на силата на триене $\vec{f}_1$ по склона е

$$A_{f,1} = -f_1 l,$$

където f_1 е големината на силата, а l – дължината на склона. Като отчетем, че

$$f_1 = kN_1 = kmg\cos\alpha, \quad l = \frac{h}{\sin\alpha},$$

получаваме

$$A_{f,1} = -kmgh\,\mathrm{ctg}\alpha.$$

Тогава от равенството

$$\frac{mv^2}{2} - mgh = -kmgh\,\mathrm{ctg}\alpha$$

намираме

$$v = \sqrt{2gh(1 - k\,\mathrm{ctg}\alpha)}.$$

Полученият резултат има смисъл при

$$1 - k\,\mathrm{ctg}\alpha > 0,$$

$$k < \mathrm{tg}\alpha,$$

тъй като само тогава шейната ще се задвижи.

б) В този случай началната механична енергия е

$$E_1 = 0 + mgh = mgh,$$

а крайната механична енергия –

$$E_2 = 0 + 0 = 0.$$

Тогава имаме

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -mgh.$$

Работата на силата на триене е

$$A_f = A_{f,1} + A_{f,2},$$

тъй като върху хоризонталния участък се променя нормалният натиск, а оттам и силата на триене. Тя става $f_2 = kN_2 = kmg$. Тогава имаме

$$A_f = -kmgh\text{ctg}\alpha - kmgs$$

и от равенството:

$$-mgh = -kmgh\text{ctg}\alpha - kmgs$$

намираме

$$s = h\left(\frac{1}{k} - \text{ctg}\alpha\right).$$

Този резултат отново има смисъл само при

$$k < \text{tg}\alpha.$$

За оценка нека приемем $\alpha = 30°$, $h = 5$ m. Тогава k трябва да удовлетворява условието

$$k < \text{tg}30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58.$$

Да изберем $k = 0{,}1$. Тогава получаваме ($g = 10$ m/s)

$$v = 9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad s = 41\ \text{m}.$$

4.83. На тънка неразтеглива нишка е окачено малко топче. Периодът на хармоничните трептения на това математично махало е $T = 1{,}3$ s. На какъв максимален ъгъл α ще се отклонява нишката от вертикалата, ако топчето преминава през равновесното положение със скорост $v = 2{,}1$ m/s?

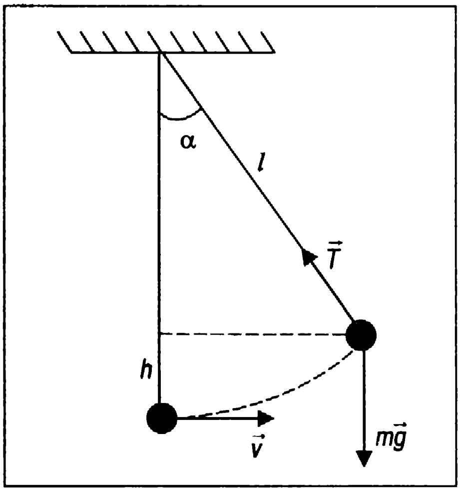
Дадено: $T = 1{,}3$ s, $v = 2{,}1$ m/s

Да се намери: α

Решение

На фиг. 4.65 са показани две положения на математичното махало – в равновесие, когато топчето има скорост v, и при максимално отклонение от равновесното положение, когато нишката сключва ъгъл α с вертикалата. На махалото действат две сили – сила на тежестта $m\vec{g}$ и сила на опън на нишката $\vec{T}$. Силата $\vec{T}$ не извършва работа, защото тя е перпендикулярна на скоростта на топчето във всеки момент от движението. Силата на тежестта е консервативна и можем да въведем потенциална енергия:

$$E_п = mgx,$$



Фиг. 4.65

където x е височината на топчето над равновесното положение. Пълната механична енергия на топчето се запазва. Тогава

$$\frac{mv^2}{2} = mgh,$$

където h е максималната височина на издигане. От фиг. 4. 65 се вижда, че

$$h = l - l\cos\alpha = l(1 - \cos\alpha).$$

Неизвестната дължина l можем да намерим от формулата за период на математично махало:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

откъдето следва

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2}.$$

От записаните съотношения получаваме уравнението

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g^2T^2}{4\pi^2}(1 - \cos\alpha),$$

откъдето намираме

$$\cos\alpha = 1 - \frac{2\pi^2v^2}{g^2T^2} \approx 0,5.$$

Следователно максималният ъгъл на отклонение на нишката е

$$\alpha = 60°.$$

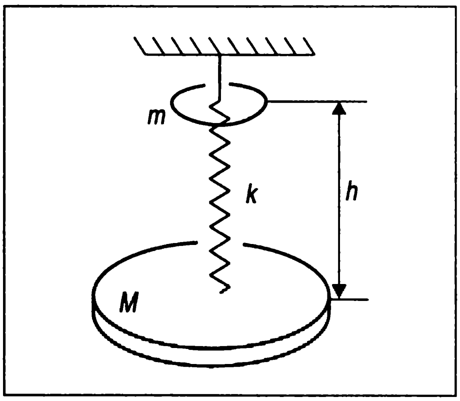
4.84. На пружина с коефициент на еластичност k е окачен хоризонтален диск с маса M. Върху него от височина h пада пръстен с маса m и прилепва към диска (фиг. 4.66). Намерете максималното разстояние, на което ще се отмести дискът от своето първоначално положение.

Дадено: k, M, m, h, g
Да се намери: d
Решение

В разглеждания пример има ясно очертани два етапа. Първият продължава до момента на прилепване на пръстена до диска, а вторият – след този момент, когато имаме движение на вертикално пружинно махало с маса $M + m$. В първия етап пръстенът пада свободно от височина h върху диска, при което потенциалната му енергия mgh се превръща в кинетична $\frac{mv^2}{2}$ непосредствено преди прилепването. Тогава

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh,$$

$$v_0 = \sqrt{2gh}.$$



Фиг. 4.66

За да определим скоростта v на пружинното махало, можем да използваме закона за запазване на импулса, тъй като за краткото време на прилепването може да се пренебрегне изменението на скоростта му под действие на силата на тежестта mg, а така също изменението на скоростта на диска под влияние на връщащата сила. Тогава имаме

$$mv_0 = (m + M)v,$$

откъдето получаваме

$$v = \frac{m}{m + M}v_0 = \frac{m}{m + M}\sqrt{2gh}.$$

След прилепването на пръстена равновесното положение на пружинното махало се отмества на разстояние x_0 надолу, като силата на тежестта mg се уравновесява от силата на еластичност kx_0 на допълнително разтегнатата пружина, т.е.

$$kx_0 = mg,$$

$$x_0 = \frac{mg}{k}.$$

Пружинното махало извършва хармонично трептене с амплитуда A около новото равновесно положение. Тогава за търсеното разстояние d получаваме

$$d = x_0 + A.$$

Амплитудата A на трептене ще намерим, като използваме закона за запазване на енергията при трептенето на пружинното махало. В началното си положение махалото има скорост v и е отклонено от равновесното положение на разстояние x_0. Тогава началната енергия е

$$E_1 = \frac{(m + M)v^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2}.$$

В крайно долно положение махалото е отклонено на разстояние A от равновесното си положение и има само потенциална енергия, т.е. крайната енергия е

$$E_2 = \frac{kA^2}{2}.$$

Тъй като

$$E_1 = E_2,$$

имаме

$$\frac{(m + M)v^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2},$$

откъдето намираме

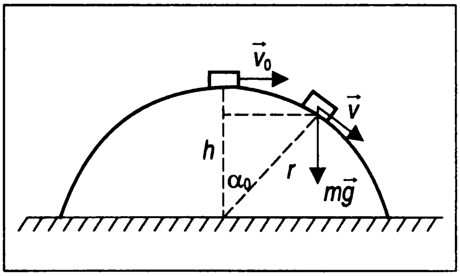
$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(m + M)v^2}{k}}.$$

Тогава търсеното разстояние d е

$$d = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2m^2gh}{k(m + M)}}.$$

4.85. На върха на полусферичен купол с радиус r се намира шайба, която може да се хлъзга без триене по повърхността на купола. Чрез удар на шайбата се придава хоризонтална скорост v_0 (фиг. 4.67). В каква точка от купола шайбата ще се откъсне от повърхността му?

Дадено: r, v_0, g
Да се намери: α
Решение



Фиг. 4.67

На фиг. 4.67 са показани началното положение на шайбата и това, при което тя се откъсва от купола. Движението на шайбата е по окръжност и насочената по радиуса, съставяща на силата на тежестта $m\vec{g}$ и реакцията на опората $\vec{R}$ играят роля на центростремителна сила. Големината на центростремителната сила е

$$mg\cos\alpha - R$$

и тя определя центростремителното ускорение $\frac{v^2}{r}$, като

$$\frac{mv^2}{r} = mg\cos\alpha - R.$$

В момента на откъсване на шайбата при ъгъл α_0 имаме $\vec{R} = 0$ и уравнението на движение е

$$g\cos\alpha_0 = \frac{v^2}{r}.$$

За да определим скоростта v, може да използваме закона за запазване на механичната енергия, тъй като силата на тежестта е консервативна, а силата на реакция не извършва работа. Ако приемем, че потенциалната енергия е нула в началното положение на шайбата, имаме

$$E_1 = \frac{mv_0^2}{2},$$

а в момента на отделяне на шайбата –

$$E_2 = \frac{mv^2}{2} - mgh = \frac{mv^2}{2} - mgr(1 - \cos\alpha_0),$$

като

$$E_1 = E_2.$$

Тогава имаме

$$v^2 = 2gr(1 - \cos\alpha_0) - v_0^2$$

и след като заместим в уравнението на движение, получаваме

$$\cos\alpha_0 = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gr}.$$

Този резултат има смисъл, когато

$$\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gr} \leq 1$$

или

$$v_0 \leq \sqrt{gr}.$$

При $v_0 = \sqrt{gr}$ шайбата се отделя от повърхността в най-горната точка. Същото се наблюдава и при $v_0 > \sqrt{gr}$. Когато $v_0 = 0$, имаме

$$\cos\alpha_0 = \frac{2}{3}$$

и шайбата се отделя от повърхността на височина две трети от радиуса на купола.

4.86. Между две топчета с маси m_1 и m_2 се намира свита хоризонтална пружина. Ако топчето с маса m_2 се задържи на място, а другото с маса m_1 се освободи, то достига скорост v_0 и се отделя от пружината. Какви скорости v_1 и v_2 ще достигнат топчетата, ако бъдат освободени едновременно? Деформацията на пружината в двата случая е една и съща.

Дадено: m_1, m_2, v_0

Да се намери: v_1, v_2

Решение

На фиг. 4.68, *а* е показан първият случай, при който топчето с маса m_2 е закрепено неподвижно. Топчето с маса m_1 се движи под действие на силата на еластичност, породена от деформираната пружина. Когато пружината е в недеформирано състояние (положение A), топчето 1 има скорост v_0 и се отделя от нея. (Ако то беше закачено за пружината, скоростта му щеше да намалява под действие на връщащата сила.) Потенциалната енергия на деформираната пружина се превръща в кинетична енергия на топчето 1:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{m_1v_0^2}{2}.$$

Във втория случай (фиг. 4.68, *б*) пружината достига недеформираното си състояние, когато топчето 1 достигне положение B, а топчето 2 – положение C, при което

$$x_1 + x_2 = x.$$

Тогава потенциалната енергия на деформираната пружина преминава в кинетична енергия на топчетата:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}.$$

Освен това върху топчетата не действат външни сили в хоризонтално направление и се запазва импулсът на системата. Тъй като първоначално двете топчета са неподвижни, имаме

$$m_1v_1 = m_2v_2.$$

Като приравним изразите за $\frac{kx^2}{2}$, намираме

$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1v_0^2.$$

Тогава, като изразим v_2 от първото уравнение

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2}v_1$$

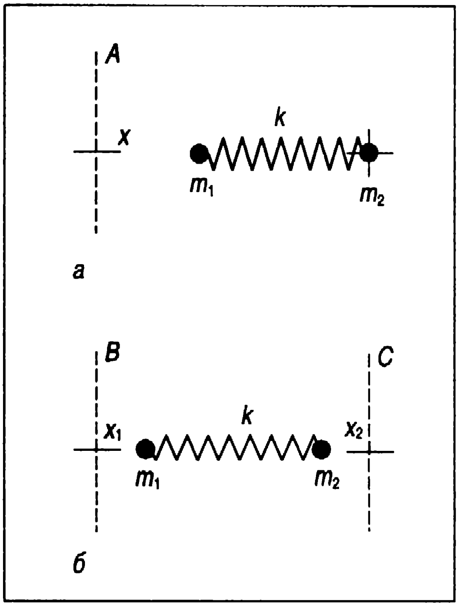
и заместим във второто уравнение

$$m_1v_1^2 + \frac{m_1^2}{m_2}v_1^2 = mv_0^2,$$

намираме

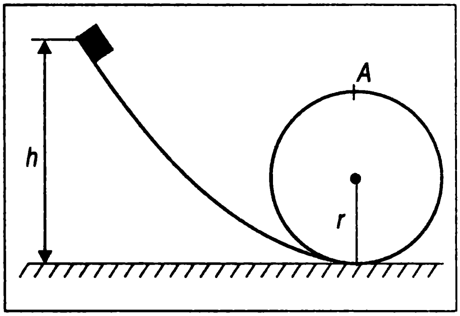
$$v_1 = \sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_2}}v_0,$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{m_1^2}{m_2(m_1 + m_2)}}v_0.$$



Фиг. 4.68

4.87. От каква минимална височина h трябва да бъде пусната шайба по улея, изобразен на фиг. 4.69, за да извърши тя един пълен оборот. Радиусът на кръговата част на улея е r. Триенето се пренебрегва.



Фиг. 4.69

Дадено: r
Да се намери: h
Решение

При спускането на шайбата по улея ѝ действат две сили – силата на тежестта $m\vec{g}$ (m е масата на шайбата, а $\vec{g}$ – земното ускорение) и силата на реакция на опората $\vec{R}$. Силата на тежестта е консервативна, а реакцията на опората $\vec{R}$ не извършва работа при движението на шайбата. В сила е законът за запазване на механичната енергия. В началния момент енергията на шайбата е

$$E_1 = mgh.$$

В най-високата точка A енергията на шайбата е

$$E_2 = \frac{mv^2}{2} + 2mgr.$$

За да бъде височината h минимална, реакцията на опората в т. A е $\vec{R} = 0$ и силата на тежестта играе роля на центростремителна сила. Тогава имаме

$$\frac{mv^2}{r} = mg.$$

От закона за запазване на енергията $E_1 = E_2$ следва

$$mgh = \frac{mgr}{2} + 2mgr = \frac{5}{2}mgr,$$

откъдето намираме

$$h = \frac{5}{2}r.$$

4.88. Топче с маса m, което се движи по хоризонтална равнина със скорост v, се удря в неподвижно топче с маса M. Ударът между топчетата е централен, абсолютно еластичен. При какво отношение на масите $\frac{M}{m}$ налитащото топче ще загуби при удара максимална част от своята кинетична енергия и на колко е равна тя?

Дадено: m, M, v
Да се намери: $\frac{M}{m}$, ΔE_{max}
Решение

При абсолютно еластичен удар между двете тела не се променят общият импулс на системата от две тела и общата кинетична енергия. Тъй като ударът е централен, след него топчетата ще се движат по правата, по която е насочена скоростта $\vec{v}$. От закона за запазване на импулса имаме

$$mv = mv_1 + Mv_2,$$

където v_1 и v_2 са проекциите на скоростите на телата след удара, като за положителна е избрана посоката на $\vec{v}$.

Тъй като кинетичната енергия се запазва, имаме

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{Mv_2^2}{2}.$$

Понеже

$$v_2=\frac{m}{M}(v-v_1),$$

след заместване в израза, отчитащ запазването на кинетичната енергия, имаме

$$m(v^2-v_1^2)=\frac{m^2}{M}(v-v_1)^2,$$

откъдето получаваме

$$v_1=\frac{1-\frac{M}{m}}{1+\frac{M}{m}}v.$$

Изменението на кинетичната енергия на тялото с маса m по големина е

$$\Delta E=\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}$$

и то има максимална стойност при $v_1=0$ (налитащото топче остава неподвижно след удара). Това е възможно, когато $\frac{M}{m}=1$. Тогава имаме

$$\Delta E_{\max}=\frac{mv^2}{2}.$$

4.89. Кълбо, движещо се със скорост $v = 2$ m/s, налита върху също такова, но неподвижно кълбо. В резултат на абсолютно еластичен нецентрален удар налитащото кълбо променя посоката си на движение, като се отклонява под ъгъл $\alpha = 30°$ спрямо първоначалната посока. Определете:

а) скоростта на всяко кълбо след удара;

б) ъгъла β между посоката на скоростта на второто кълбо и първоначалната посока на движение на първото кълбо.

Дадено: $v = 2$ m/s, $\alpha = 30°$
Да се намери: v_1, v_2, β
Решение

а) Тъй като ударът е абсолютно еластичен, импулсът на системата от двете кълба и общата им кинетична енергия не се променят. От закона за запазване на импулса

$$m\vec{v}=m\vec{v}_1+m\vec{v}_2$$

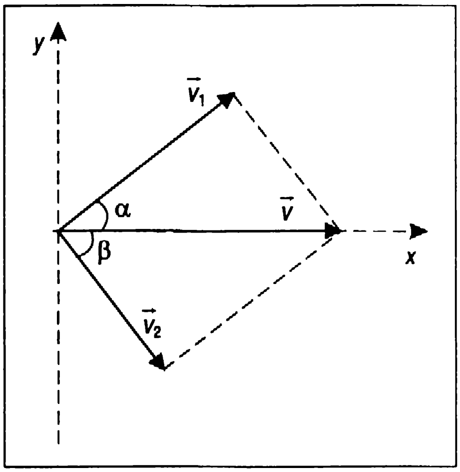
следва (фиг. 4.70)

$$\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2.$$

След като проектираме равенството върху осите x и y, получаваме

$$v=v_1\cos\alpha+v_2\cos\beta,$$

$$0=v_1\sin\alpha-v_2\sin\beta.$$



Фиг. 4.70

От друга страна, запазва се и кинетичната енергия

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2}.$$

Тогава имаме

$$v_2\cos\beta = v - v_1\cos\alpha,$$

$$v_2\sin\beta = v_1\sin\alpha.$$

Повдигаме двете равенства на квадрат и ги събираме почленно:

$$v_2^2(\cos^2\beta+\sin^2\beta)=v^2+v_1^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-2vv_1\cos\alpha,$$

$$v_2^2=v^2+v_1^2-2vv_1\cos\alpha.$$

Като заместим v_2^2 в равенството $v^2=v_1^2+v_2^2$, получаваме

$$v_1=v\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}v\approx 1{,}7\ \text{m/s},$$

$$v_2=v\sin\alpha=\frac{1}{2}v=1{,}0\ \text{m/s}.$$

б) За да определим ъгъла β, ще заместим v_1 и v_2 в равенството

$$v_2\sin\beta=v_1\sin\alpha,$$

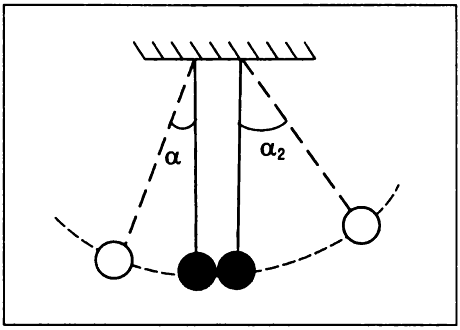
откъдето получаваме

$$\sin\beta=\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следователно $\beta = 60°$.

4.90. Две еднакви пластилинови топчета са окачени на нишки с равни дължини и се допират едно до друго (фиг. 4.71). Отклоняваме лявото топче на ъгъл α_1 наляво, а дясното топче – на ъгъл α_2 надясно. Пускаме ги едновременно без начална скорост. На какъв максимален ъгъл β от вертикалата ще се отклонят топчетата след удар между тях? Ъглите α_1, α_2 и β са малки.

Дадено: α_1, α_2
Да се намери: β
Решение



Фиг. 4.71

След пускането на топчетата между тях се осъществява абсолютно нееластичен удар (топчетата се залепват и се движат като едно тяло). Трябва да се определи мястото на удара. За тази цел ще използваме условието, че ъглите α_1, α_2 и β са малки. В този случай трептенето на всяко махало е хармонично и тъй като те имат еднакви дължини, периодът на трептенията им е един и същ. Срещата на двете топчета ще стане в точката на равновесие, понеже всяко едно от тях достига тази точка за време една четвърт от периода. Нека означим с v_1 и v_2 скоростите на топчетата в точката на равновесие. Тогава имаме

$$v_1=\sqrt{2gh_1},\quad v_2=\sqrt{2gh_2},$$

където h_1 и h_2 са височините на максимално издигане. От закона за запазване на импулса следва

$$mv_2 - mv_1 = 2mu,$$

където u е общата скорост на топчетата и тя е

$$u = \frac{1}{2}(v_2 - v_1).$$

От закона за запазване на енергията имаме

$$\frac{2mu^2}{2} = 2mgh.$$

Тук h е максималната височина на издигане на съставното махало и

$$u = \sqrt{2gh}.$$

След като заместим, получаваме

$$\sqrt{h} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}\right).$$

Максималната височина h на издигане на махало над равновесното му положение е свързана с ъгъла на отклонение β на махалото чрез израза

$$h = l(1 - \cos\beta) = 2l\sin^2\frac{\beta}{2},$$

където l е дължината на махалото. При малки ъгли е в сила приближеното равенство

$$\sin\frac{\beta}{2} \approx \frac{\beta}{2},$$

откъдето следва

$$h \approx \frac{l\beta^2}{2}.$$

Аналогично имаме

$$h_1 \approx \frac{l\alpha_1^2}{2}, \quad h_2 \approx \frac{l\alpha_2^2}{2}$$

и след като заместим, намираме

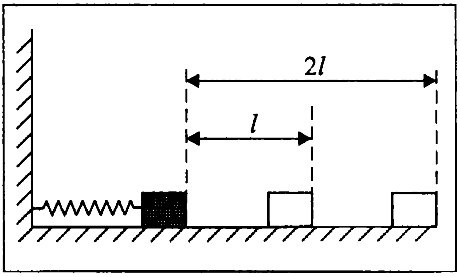
$$\beta = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Задачи

4.91. Под действие на две взаимно перпендикулярни сили $F_1 = 30$ N и $F_2 = 40$ N неподвижно тяло се премества на разстояние $s = 10$ m. Определете работата, извършена от силите F_1, F_2 и от тяхната равнодействаща сила F.

4.92. Развивайки постоянна мощност, локомотив тегли влакова композиция със скорост $v_1 = 50$ km/h нагоре по наклонена равнина с ъгъл на наклона $\alpha_1 = 5.10^{-3}$ rad. При същите условия на работа на локомотива влаковата композиция се движи със скорост $v_2 = 60$ km/h, когато движението е по наклонена равнина с ъгъл на наклона $\alpha_2 = 2{,}5.10^{-3}$ rad. Определете коефициента на триене, ако той е един и същ в двата случая.

4.93. На хоризонтална равнина лежи трупче, прикрепено към вертикална стена чрез неразтегнатата пружина (фиг. 4.72). За да се отдалечи трупчето от стената на разстояние $l = 2$ cm, външна сила трябва да извърши най-малко работа $A = 20$ mJ. При отдалечаване на трупчето на два пъти по-голямо разстояние външната сила трябва да извърши най-малко три пъти по-голяма работа. Определете коефициента на еластичност на пружината.

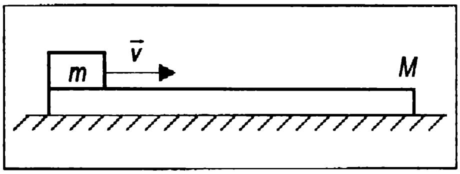


Фиг. 4.72

4.94. Шейна с дължина на плазовете $l = 1$ m навлиза със скорост $v_0 = 5$ m/s в опесъчен участък с широчина $L = 2$ m. Коефициентът на триене между плазовете на шейната и опесъчения участък е 0,5. Определете скоростта на шейната непосредствено след преминаването на този участък.

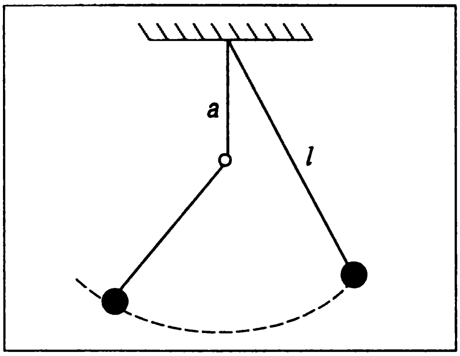
4.95. Трупче, което се хлъзга по гладка хоризонтална равнина със скорост $v = 5$ m/s, пресича границата с хоризонтална равнина с коефициент на триене $k = 0{,}8$. При каква дължина на трупчето неговата задна стена ще се окаже неподвижна на границата между двете равнини?

4.96. На тяло с маса $m = 600$ g, което лежи на дълга хоризонтална дъска с маса $M = 1$ kg, е придадена скорост $v = 3$ m/s, насочена по дължината на дъската (фиг. 4.73). Определете работата на силите на триене до момента, в който тялото престава да се хлъзга по дъската. Триенето между дъската и хоризонталната равнина се пренебрегва.

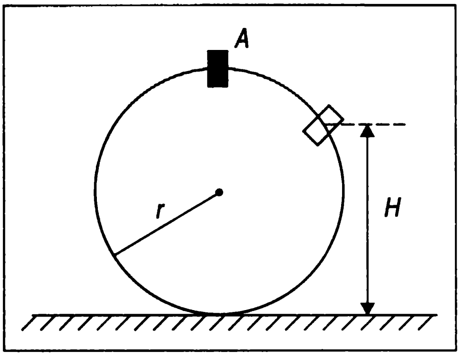


Фиг. 4.73

4.97. На движението на махало пречи пирон, забит на разстояние a под точката на окачване на махалото (фиг. 4.74). Намерете максималното опъване на нишката, ако началният ъгъл на отклонение е α_0, а разстоянието a се определя от условието $\frac{a}{l} = \eta$.



Фиг. 4.74

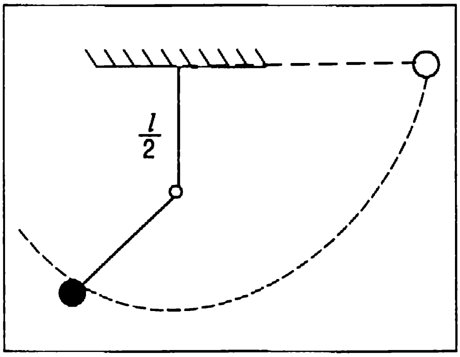


Фиг. 4.75

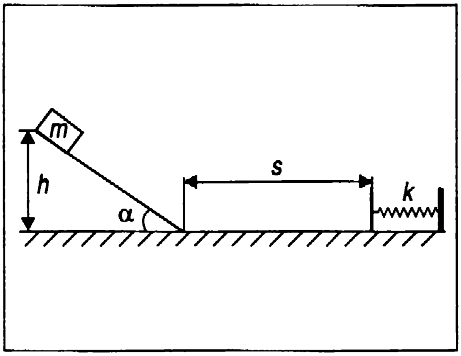
4.98. Шайба с маса $m = 10$ g е нанизана на вертикален пръстен с радиус $r = 6$ cm (фиг. 4.75). Шайбата се отклонява от положението си на равновесие (т. A) и започва да се хлъзга без триене по пръстена. Началната ѝ скорост е нула. Намерете нормалния натиск на шайбата върху пръстена, когато тя се намира на височина $H = 10$ cm.

4.99. На математично махало с маса m в положението на равновесие действа минимален тласък, при което махалото извършва пълен оборот във вертикална равнина. На колко е равна силата на опън на нишката при преминаване на махалото през равновесното положение?

** **4.100.** Топче, окачено на нишка с дължина l, е отклонено до хоризонтално положение на нишката и е пуснато без начална скорост (фиг. 4.76). На каква максимална височина h над равновесното положение ще се издигне топчето, ако при преминаване през него нишката налита на гвоздей, разположен на разстояние $l/2$ от точката на окачване?



Фиг. 4.76



Фиг. 4.77

4.101. Тяло с маса $m = 1$ kg се спуска от състояние на покой от височина $h = 1$ m по наклонена равнина с ъгъл на наклона $\alpha = 30°$ (фиг. 4.77). След като измине по хоризонталната равнина разстояние $s = 2$ m, тялото попада върху буфер, представляващ недеформирана пружина с коефициент на еластичност $k = 50$ N/m. Определете максималното свиване на пружината, ако коефициентът на триене при движението на тялото е $\mu = 0,1$.

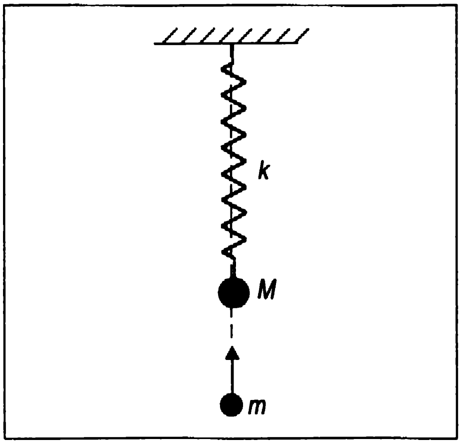
** **4.102.** Между неподвижно вертикално пружинно махало с маса M и коефициент на еластичност на пружината k и тяло с маса m се осъществява удар, при което махалото се задвижва (фиг. 4.78). Скоростта на тялото с маса m непосредствено преди удара е v. Определете:

а) честотата на трептене на махалото;

б) амплитудата на трептене;

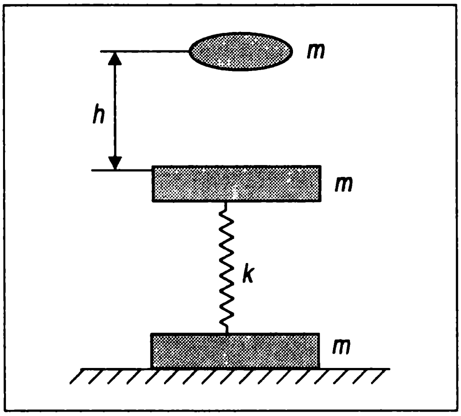
в) височината на издигане на тялото с маса M над първоначалното му положение.

Разгледайте поотделно случаите на абсолютно еластичен и абсолютно нееластичен удар между телата.

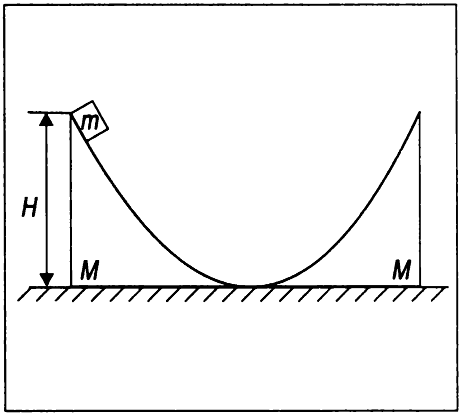


Фиг. 4.78

** **4.103.** Две трупчета всяко с маса $m = 500$ g са свързани с пружина с коефициент на еластичност $k = 100$ N/m, както е показано на фиг. 4.79. Долното трупче лежи върху хоризонтална равнина, а върху горното пада тяло с маса m и прилепва към него. От каква минимална височина h трябва да падне тялото, за да подскочи долното трупче?



Фиг. 4.79



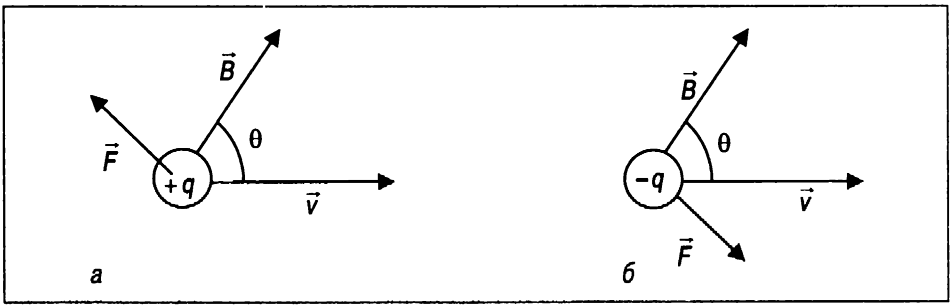
Фиг. 4.80

** **4.104.** Два неподвижни клина с еднаква маса $M = 2$ kg имат плавни преходи върху хоризонтална равнина и първоначално са разположени така, както е показано на фиг. 4.80. По левия клин от височина $H = 75$ cm започва да се спуска шайба с маса $m = 0,5$ kg. На каква максимална височина h ще се издигне шайбата по десния клин? Триенето се пренебрегва.

Движение на заредени частици в електрични и магнитни полета

Върху заредена частица със заряд q, която се движи в електрично поле с интензитет $\vec{E}$ и магнитно поле с индукция $\vec{B}$, действат електрична сила $\vec{F}_e = q\vec{E}$ и магнитна (или Лоренцова) сила $\vec{F}_m$. Векторът на магнитната сила е перпендикулярен на равнината, образувана от вектора на скоростта $\vec{v}$ и вектора на магнитната индукция, като посоката му се определя по правилото на изпънатите пръсти на дясната ръка:

Ако изпънатият палец на дясната ръка е по посока на скоростта на частицата, а останалите изпънати пръсти – по посока на магнитната индукция, магнитната сила, която действа на частица с положителен заряд, е насочена перпендикулярно на дланта навън, а на частица с отрицателен заряд – към дланта (фиг. 4.81).



Фиг. 4.81

Големината F_m на магнитната сила зависи от ъгъла θ между векторите на скоростта и на магнитната индукция. Ако частицата се движи успоредно на магнитните индукционни линии ($\theta = 0°$ или $\theta = 180°$), $F_m = 0$. Големината на магнитната сила е максимална, когато частицата се движи перпендикулярно на индукционните линии ($\theta = 90°$):

$$F_{m,max} = |q|vB.$$

От II принцип на Нютон

$$m\vec{a} = \vec{F}_e + \vec{F}_m$$

следва, че ако върху частицата действа само магнитна сила, нейното ускорение $\vec{a}$ е перпендикулярно на скоростта ѝ $\vec{v}$. Следователно в този случай магнитното поле води до промяна посоката на движение на частицата, без да променя големината на нейната скорост. При движение само в еднородно магнитно поле частицата обикаля равномерно по окръжност.

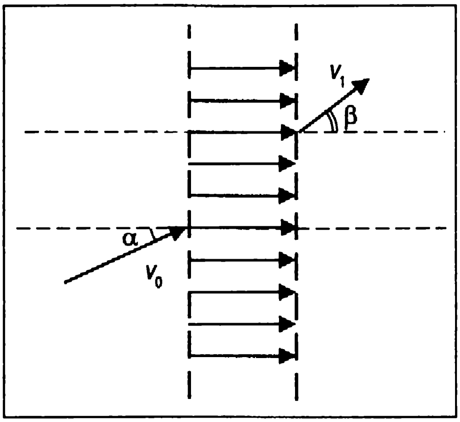
В таблицата по-долу са дадени зарядите и масите на някои от заредените частици, които често се използват в различни устройства като ускорители, електронно-лъчеви тръби и др.

Частица	q (C)	m (kg)
електрон	$-1,6.10^{-19}$	$9,10.10^{-31}$
протон	$1,6.10^{-19}$	$1,67.10^{-27}$
α-частица	$3,2.10^{-19}$	$6,69.10^{-27}$

В примерите и задачите по-долу ще използваме данните от таблицата като зададени величини. Също така ще обозначаваме с e големината на елементарния електричен заряд.

ПРИМЕРИ

4.105. Електрон попада в плосък кондензатор с начална скорост скорост $v_0 = 1,0.10^7$ m/s, насочена под ъгъл $\alpha = 30°$ спрямо силовите линии на електричното поле (фиг. 4.82). Между плочите на кондензатора е приложено напрежение $U = 190$ V. Намерете с каква скорост v_1 и под какъв ъгъл β спрямо силовите линии електронът ще напусне кондензатора. Пластините на кондензатора са изработени от тънка метална мрежа, така че електронът преминава свободно през тях, без да променя посоката и големината на скоростта си.



Фиг. 4.82

Дадено: $v_0 = 1,0.10^7$ m/s, $\alpha = 30°$, $U = 190$ V
Да се намери: v_1, β

Решение

Избираме ос x по посока на силовите линии и ос y – успоредна на пластините на кондензатора. Понеже зарядът на електрона е отрицателен, върху него действа електрична сила $\vec{F}_e$, насочена противоположно на оста x (фиг. 4.83.), която извършва отрицателна работа

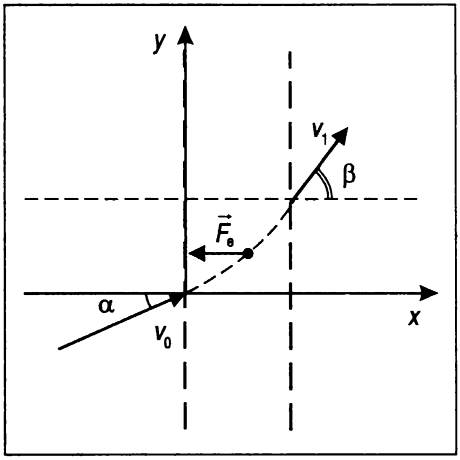
$$A = (-e)U,$$

докато електронът премине през кондензатора. От закона за запазване на енергията следва

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = (-e)U,$$

откъдето намираме

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - \frac{2eU}{m}} \approx 6{,}87.10^6 \text{ m/s}.$$



Фиг. 4.83

Понеже компонентата F_{ey} на електричната сила по y е нула, за компонентата на ускорението на частицата по y също имаме: $a_y = 0$. Следователно компонентата на скоростта v_y не се променя, докато електронът преминава през кондензатора:

$$v_0 \sin\alpha = v_1 \sin\beta,$$

откъдето определяме:

$$\sin\beta = \frac{v_0 \sin\alpha}{v_1} \approx 0{,}727.$$

С помощта на калкулатор или тригонометрична таблица намираме и $\beta \approx 46{,}7°$.

4.106. Получете изрази за радиуса R на кръговата орбита и периода T на обикаляне на заредена частица с маса m и заряд q, която се движи със скорост v, насочена перпендикулярно спрямо индукционните линии на еднородно магнитно поле с индукция B. Пресметнете числено радиуса и периода за електрон и за протон, които се движат с еднакви скорости 10^6 m/s в еднородно магнитно поле с индукция 1 T.

Дадено: m, q, v, B, $v_0 = 10^6$ m/s, $B_0 = 1$ T
Да се намери: R, T
Решение

Когато заредената частица обикаля по окръжност, тя има центростремително ускорение

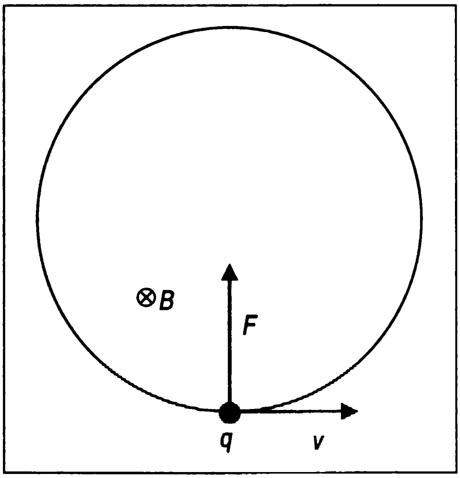
$$a_c = \frac{v^2}{R},$$

което се дължи на магнитната сила

$$F_m = |q| vB,$$

насочена перпендикулярно спрямо скоростта на частицата (фиг. 4.84). От II принцип на Нютон

$$ma_c = F_m,$$



Фиг. 4.84

където m е масата на частицата, намираме израз за радиуса на орбитата:

$$R = \frac{mv}{|q|B}.$$

Периодът на обикаляне съответно е

$$T = \frac{2\pi R}{v},$$

откъдето получаваме следния окончателен израз:

$$T = \frac{2\pi m}{|q|B}.$$

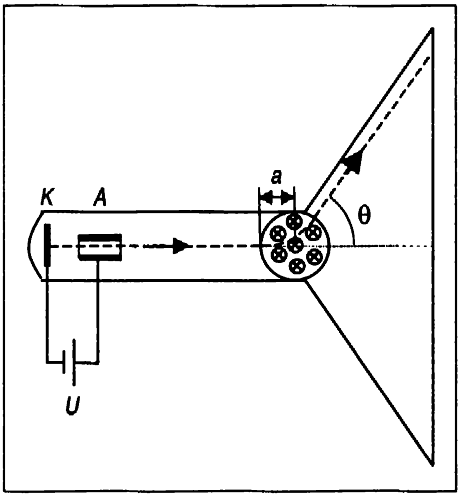
Важният извод от получените резултати е, че при зададена индукция на магнитното поле периодът на обикаляне на заредена частица по кръгова орбита не зависи от нейната скорост, а само от нейния специфичен заряд, т.е. от отношението q/m.

При $B_0 = 1$ T и $v_0 = 10^6$ m/s и като използваме данните от таблицата, пресмятаме:

а) $R \approx 5{,}7.10^{-6}$ m = 5,7 μm и $T = 3{,}6.10^{-11}$ s за електрон;

б) $R \approx 1{,}0.10^{-2}$ m = 1,0 cm и $T = 6{,}6.10^{-8}$ s за протон.

4.107. На фиг. 4.85 е показана принципната схема на кинескопа в телевизор. Електрони с пренебрежима начална скорост се ускоряват между катода (K) и анода (A) от напрежение U = 10 kV. След това електроните попадат в отклоняваща намотка с радиус a = 2 cm, която създава еднородно магнитно поле, насочено перпендикулярно на равнината на чертежа. При навлизане в намотката скоростта на електроните е насочена към центъра ѝ. При каква индукция на магнитното поле, след като преминат през намотката, електроните се отклоняват на ъгъл $\theta = 60°$ спрямо първоначалната си посока на движение?



Фиг. 4.85

Дадено: $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg, $q = -e = -1{,}6.10^{-19}$ C, U = 10 000 V, $a = 2.10^{-2}$ m; $\theta = 60°$

Да се намери: B

Решение

Кинетичната енергия, която електроните придобиват при ускоряване между катода и анода, е равна на работата, която извършват електричните сили

$$\frac{mv^2}{2} = eU.$$

Следователно електроните достигат намотката със скорост

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Съгласно с резултата, получен в предишния пример, в областта с магнитно поле електроните са движат по дъга от окръжност с радиус

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

Означаваме с O' центъра на дъгата, а с A и A' – пресечните точки на траекторията на електрона с намотката (фиг. 4.86). От чертежа непосредствено се установява, че

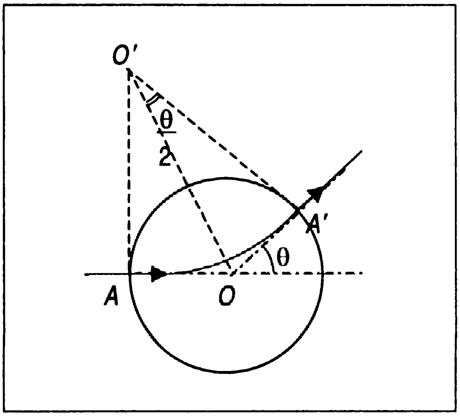
$$\sphericalangle OO'A = \sphericalangle OO'A' = \frac{\theta}{2}.$$

За правоъгълния триъгълник $O'OA$ с катети $AO' = R$ и $AO = a$ получаваме съответно

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{a}{R} = aB\sqrt{\frac{e}{2mU}},$$

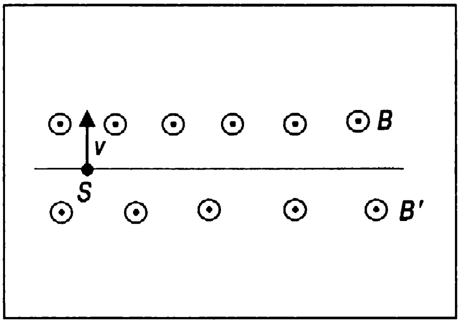
откъдето определяме индукцията на магнитното поле

$$B = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2mU}{e}}\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx 9{,}7.10^{-3}\,\text{T}.$$

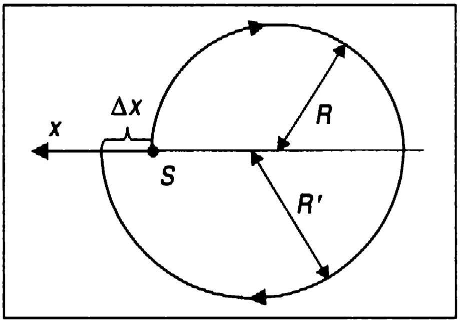


Фиг. 4.86

4.108. В две области на пространството, разделени с плоска граница, са създадени еднородни магнитни полета с еднакви посоки и големини на индукцята съответно $B = 0{,}1$ T и $B' = B - \Delta B$, където $\Delta B = 1{,}0.10^{-4}$ T (фиг. 4.87). На границата между областите е разположен радиоактивен източник S, който излъчва α-частица с начална скорост $v = 1{,}57.10^{7}$ m/s, насочена перпендикулярно спрямо граничната повърхност. На какво разстояние d от източника се отдалечава α-частицата за време $t = 1$ s.



Фиг. 4.87



Фиг. 4.88

Дадено: $m_\alpha = 6{,}7.10^{-27}$ kg, $q = 3{,}2.10^{-19}$ C, $B = 0{,}1$ T, $\Delta B = 1{,}0.10^{-4}$ T, $v = 1{,}57.10^{7}$ m/s, $t = 1$ s

Да се намери: d

Решение

Избираме ос x, насочена по разделителната повърхност и ос y – перпендикулярна на нея. Както се вижда от фиг. 4.88, α-частицата се движи в първата област по полуокръжност с радиус

$$R = \frac{m_\alpha v}{qB}.$$

След като премине във втората област, частицата описва дъга с по-голям радиус

$$R' = \frac{m_\alpha v}{qB'} = \frac{m_\alpha v}{q(B - \Delta B)}.$$

Следователно, когато α-частицата отново навлиза в първата област, тя е отместена в направление на оста x на разстояние Δx от източника, което е равно на разликата от диаметрите на двете дъги:

$$\Delta x = 2R' - 2R = \frac{2m_\alpha v\Delta B}{qB(B-\Delta B)}.$$

В същото време компонентата на преместването в направление на y е нула. Като използваме факта, че $\Delta B << B$, можем да запишем

$$\Delta x \approx \frac{2m_\alpha v\Delta B}{qB^2}.$$

Времето T за една обиколка съответно е

$$T = \frac{\pi R}{v} + \frac{\pi R'}{v} = \frac{\pi m_\alpha(2B-\Delta B)}{qB(B-\Delta B)}.$$

Отново ще използваме, че $\Delta B << B$, откъдето следва

$$T \approx \frac{2\pi m_\alpha}{qB}.$$

Ясно е, че при всяка следваща обиколка частицата се отдалечава на разстояние Δx от източника. За време t частицата извършва общо

$$N = \frac{t}{T}$$

обиколки и се премества на разстояние:

$$d = N\Delta x = \frac{v\Delta Bt}{\pi B} = 5{,}0.10^3\,\mathrm{m}$$

от източника.

Коментар. Можем да дефинираме средна скорост, с която заредената частица се отдалечава от източника:

$$v_{ср} = \frac{d}{t} = \frac{v\Delta B}{\pi B} = 5{,}0.10^3\,\mathrm{m/s},$$

която е значително по-малка (в случая $\approx 10^4$ пъти) от големината на нейната моментна скорост. Прието е такова бавно (в сравнение с моментната скорост) преместване да се нарича **дрейф**, а съответната му средна скорост – **дрейфова скорост**. Друг пример за дрейф е движението на свободните електрони в металите под действие на външно електрично поле. Всеки електрон в метала се движи по сложна, начупена траектория с моментна скорост около 10^6 m/s, но като цяло се премества в направление на електричното поле със средна (дрейфова) скорост, която е едва няколко mm/s.

4.109. На фиг. 4.89 е показана принципна схема на „магнитно“ фотореле. То се състои от фотокатод K и анод A, които са успоредни пластини, поставени на разстояние d = 1 cm една от друга. Върху катода пада сноп монохроматична светлина с дължина на вълната λ = 400 nm. Успоредно на пластините е приложено еднородно магнитно поле. При каква големина B на магнитната индукция през веригата не тече ток? Отделителната работа на фотокатода е A = 2 eV.

Дадено: $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C, $h = 6{,}64.10^{-34}$ J.s, $c = 3.10^8$ m/s, d = 1 cm, λ = 400 nm, A = 2 eV

Да се намери: B

Решение

Максималната скорост v_{max} на електроните, които се отделят от катода в резултат на външен фотоефект, се определя от уравнението на Айнщайн:

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - A,$$

откъдето намираме

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)}{m}} \approx 8,85.10^5\ \text{m/s}.$$

За извършване на числените пресмятания е необходимо да изразим дължината на вълната в метри ($\lambda = 4.10^{-7}$ m), а отделителната работа – в джаули ($A = 3,2.10^{-19}$ J). След като напуснат катода, електроните се движат по кръгови траектории. Тези от тях, които имат скорост v_{max}, се движат по дъги с най-голям радиус

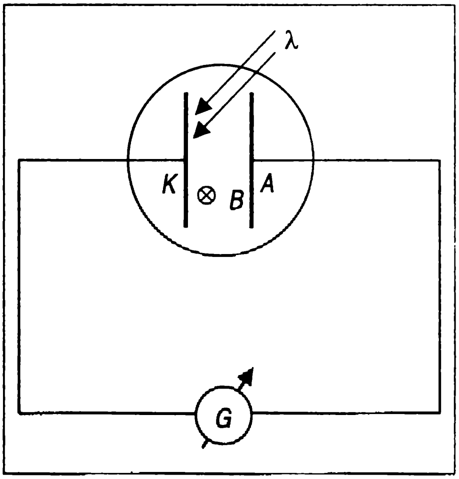
$$R_{max} = \frac{mv_{max}}{eB}.$$

Както се вижда от фиг. 4.90, на най-голямо разстояние – $2R_{max}$ от катода, се отдалечават тези електрони, чиято начална скорост е успоредна на електродите. Ако те не могат да достигнат анода, т.е.

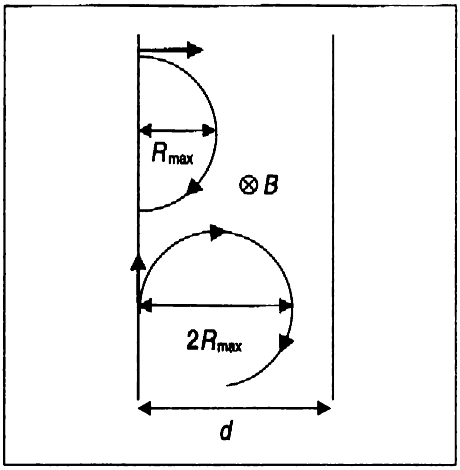
$$2R_{max} \leq d,$$

през фотоклетката няма да тече електричен ток. Следователно веригата е прекъсната, когато

$$B \geq \frac{2mv_{max}}{ed} = 1,0.10^{-3}\ \text{T}.$$



Фиг. 4.89



Фиг. 4.90

4.110. Електронът във водородния атом обикаля около ядрото по кръгова орбита с радиус $r = 5,2.10^{-11}$ m. а) Намерете скоростта v_0, с която електронът се движи по орбитата. б) С колко се променя скоростта на електрона, когато атомът се намира във външно магнитно поле с индукция $B = 1$ T, насочена перпендикулярно спрямо орбитата на електрона?

Дадено: $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg, $e = 1,6.10^{-19}$ C, $r = 5,2.10^{-11}$ m, $B = 1$ T

Да се намери: v_0, Δv

Решение

а) При равномерно обикаляне около ядрото електронът има центростремително ускорение

$$a_c = \frac{v_0^2}{r}.$$

Върху електрона действа единствено електрична сила на привличане към ядрото

$$F_e = \frac{ke^2}{r^2}.$$

От II принцип на Нютон следва, че

$$\frac{mv_0^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2},$$

откъдето намираме

$$v_0 = e\sqrt{\frac{k}{mr}} \approx 2{,}2.10^6\ \mathrm{m/s}.$$

б) Възможни са две различни посоки на магнитното поле спрямо равнината на електронната орбита. В случая, показан на фиг. 4.91, *а*, магнитната сила F_m, която действа на електрона, е насочена в същата посока, в която е насочена и електричната сила F_e. Тогава електронът ще има по-голямо центростремително ускорение и ще обикаля с по-голяма скорост, отколкото когато няма магнитно поле. От II принцип на Нютон имаме

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2} + evB.$$

Като вземем предвид, че

$$v_0^2 = \frac{ke^2}{mr},$$

получаваме следното уравнение за определяне на скоростта:

$$v^2 - \frac{eBr}{m}v - v_0^2 = 0.$$

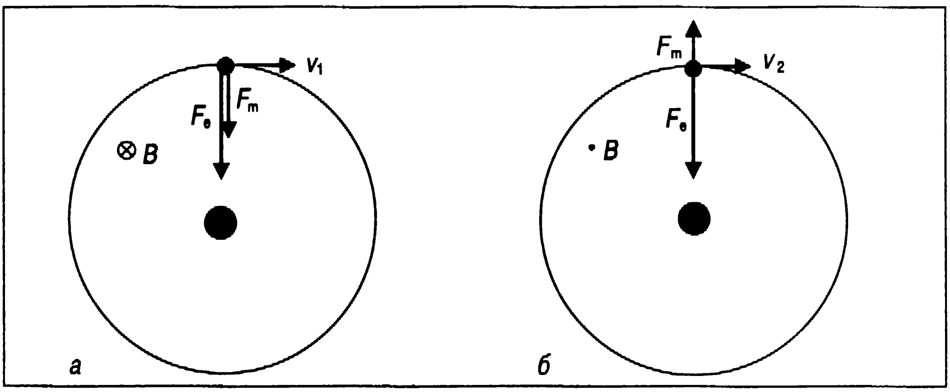
Понеже търсим големината на скоростта, физически смисъл има само положителният корен

$$v_1 = \frac{eBr}{2m} + \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eBr}{2m}\right)^2},$$

откъдето намираме промяната на скоростта

$$\Delta v_1 = \frac{eBr}{2m} + \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eBr}{2m}\right)^2} - v_0.$$

Непосредствено се проверява, че събираемото $\left(\frac{eBr}{2m}\right)^2$ под квадратния корен е около



Фиг. 4.91

10^{11} пъти по-малко от v_0^2, поради което може да бъде пренебрегнато. Тогава окончателно получаваме

$$\Delta v_1 \approx \frac{eBr}{2m} = 4{,}6\,\text{m/s}.$$

В случая, показан на фиг. 4.91, *б*, магнитната сила е противоположна на електричната сила. Тогава от II принцип на Нютон имаме

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2} - evB,$$

откъдето следва, че скоростта на електрона е по-малка от v_0. Като повторим разсъжденията, които използвахме в първия случай, намираме

$$\Delta v_2 \approx -\frac{eBr}{2m} = -4{,}6\,\text{m/s}.$$

Знакът минус показва, че скоростта намалява спрямо v_0.

Коментар. На пръв поглед промяната на скоростта, която се дължи на магнитното поле, е нищожна в сравнение със скоростта v_0. Лесно обаче можем да се убедим, че под действие на магнитното поле честотата, с която електронът обикаля, се променя с

$$\Delta\nu = \frac{\Delta v}{2\pi r} = \pm\frac{eB}{4\pi m} \approx \pm 1{,}4.10^{10}\,\text{Hz},$$

като знакът „+“ или „–“ зависи от ориентацията на магнитното поле спрямо орбитата на електрона. Оказва се, че това изменение на честотата може да бъде установено по съответната промяна на дължината на светлинната вълната, която атомът излъчва. Това явление е известно като **ефект на Зееман** и се изразява в появата на две нови линии на излъчване в спектъра на атом, поставен в магнитно поле.

4.111. В единия край на плосък кондензатор е разположен радиоактивен източник, който излъчва α-частици със скорост $1{,}0.10^7$ m/s. Кондензаторът е поставен в магнитно поле с индукция 0,1 T, което е успоредно на плочите. Какво напрежение трябва да се подаде между плочите, така че α-частиците да достигнат другия край на кондензатора? Разстоянието между плочите е 0,10 mm и е много по-малко от дължината на плочите.

Дадено: $v = 1{,}0.10^7$ m/s, $B = 0{,}1$ T, $d = 1{,}0.10^{-4}$ m
Да се намери: U
Решение

За да преминат през кондензатора, частиците трябва да се движат праволинейно, успоредно на плочите (фиг. 4.92). Това означава, че магнитната сила $\vec{F}_m$ и електричната сила $\vec{F}_e$, които действат върху дадена α-частица, трябва да се уравновесяват:

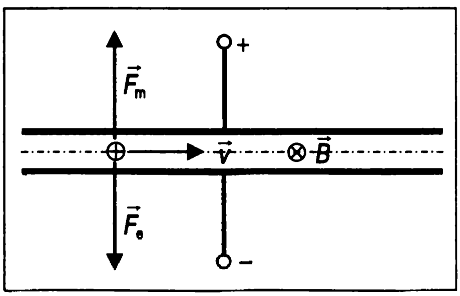
$$qvB = qE,$$

където q е зарядът на α-частицата, а E – интензитетът на електричното поле между плочите на кондензатора. От това уравнение определяме

$$E = vB$$

и намираме съответно напрежението между плочите

$$U = Ed = vBd = 100\ \text{V}.$$



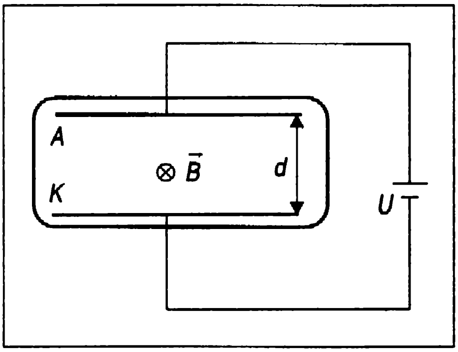
Фиг. 4.92

Коментар. Това просто устройство се нарича **селектор по скорости** и се използва широко в атомната физика, когато трябва да се получи сноп от заредени частици с точно определена скорост. Скоростта на частиците, които преминават през селектора, се регулира, като се променя приложеното напрежение между плочите на кондензатора:

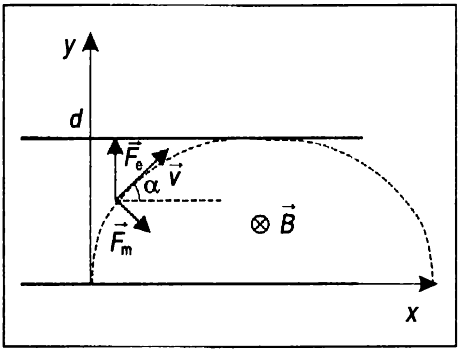
$$v = \frac{U}{Bd}.$$

Както се вижда, тази скорост не зависи от вида на частиците, т.е. от големината и от знака на техния заряд, както и от масата им.

4.112. Вакуумен диод се състои от два плоски електрода – нагреваем катод K и анод A, разположени на разстояние $d = 2$ cm един от друг, между които е подадено напрежение $U = 50$ V (фиг. 4.93). От катода се отделят електрони с пренебрежимо малка начална скорост, които се ускоряват в посока към анода. Успоредно на електродите е подадено външно магнитно поле. При каква големина на магнитната индукция през диода няма да протича електричен ток? Приемете, че електричното поле между електродите е еднородно.



Фиг. 4.93



Фиг. 4.94

Дадено: $e = 1{,}6.10^{-19}$ C, $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg, $d = 0{,}02$ m, $U = 50$ V
Да се намери: B
Решение

Върху всеки електрон действат две сили – електричната сила $\vec{F}_e$, която го ускорява в посока към анода, и магнитната сила $\vec{F}_m$, която води до закривяване на неговата траектория (фиг. 4.94). Токът през диода престава да тече тогава, когато траекторията на електрона се допира до анода, а не пресича повърхността му, т.е. скоростта на електрона е насочена по оста x. За да определим скоростта, с която електронът достига анода, ще разгледаме компонентата на магнитната сила в направление на x:

$$F_{mx} = evB\sin\alpha.$$

Като вземем предвид, че $v\sin\alpha$ е компонентата на скоростта в направление на оста y, получаваме

$$F_{mx} = ev_yB.$$

От II принцип на Нютон имаме

$$ma_x = m\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = eBv_y,$$

където Δv_x е нарастването на компонентата на скоростта по x за много малък интервал от време Δt. От друга страна, за същия интервал от време

$$\Delta y = v_y \Delta t,$$

където Δy е преместването на частицата в направление на оста y. От последните две уравнения намираме

$$\Delta v_x = \frac{eB}{m}\Delta y,$$

т.е. промяната на x-компонентата на скоростта е пропорционална на преместването в направление на y. Както виждаме, това съотношение не зависи от големината на интервала Δt и следователно може да бъде приложено за цялото време на движение на електрона между електродите. Електронът започва движение с нулева начална скорост от точка с координата $y = 0$ и когато достигне анода ($y = d$), скоростта му v е насочена изцяло по x. Следователно

$$\Delta y = d,$$

$$\Delta v_x = v,$$

$$v = \frac{eB}{m}d.$$

От друга страна, можем да изразим скоростта на електрона от закона за запазване на енергията. Понеже магнитната сила е перпендикулярна на скоростта, тя не върши работа. Следователно кинетичната енергия, която придобива електронът, когато достига анода, е равна на работата, извършвана от електричната сила:

$$\frac{mv^2}{2} = eU.$$

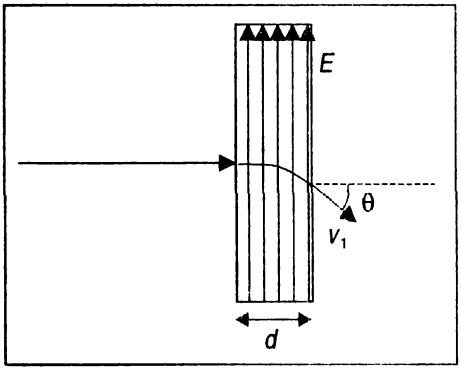
Като заместим получения израз за v, намираме

$$\frac{eB^2d^2}{2m} = U$$

или $$B = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{2mU}{e}} \approx 1{,}2.10^{-3}\ \text{T}.$$

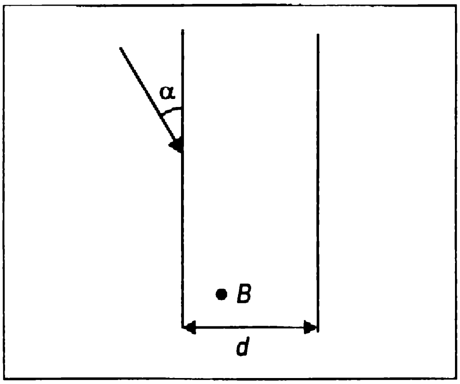
Задачи

4.113. Електрон, ускорен от напрежение U_0 = 20 000 V, попада в област с дебелина d = 5 cm, в която е създадено еднородно електрично поле с интензитет E = 100 V/m, насочено перпендикулярно спрямо първоначалната посоката на движение на електрона (фиг. 4.95). Намерете големината на скоростта v_1, с която електронът напуска областта, и ъгъла θ, който тя сключва с посоката на началната скорост.

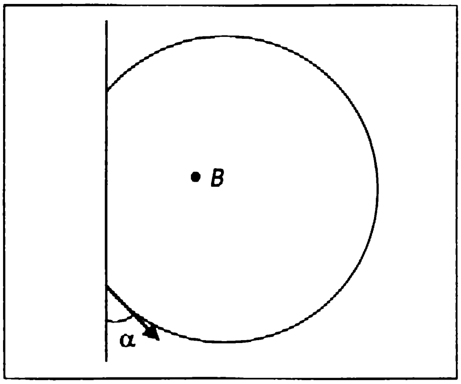


Фиг. 4.95

4.114. Протон попада в област с дебелина d = 1 cm, в която е създадено магнитно поле с индукция $B = 1,0.10^{-2}$ T, насочена успоредно на разделителната повърхност, както е показано на фиг. 4.96. Началната скорост на електрона сключва ъгъл α = 30° с границата на областта. Каква е минималната кинетична енергия (изразена в електронволти) на протона, при която той може да премине през областта?



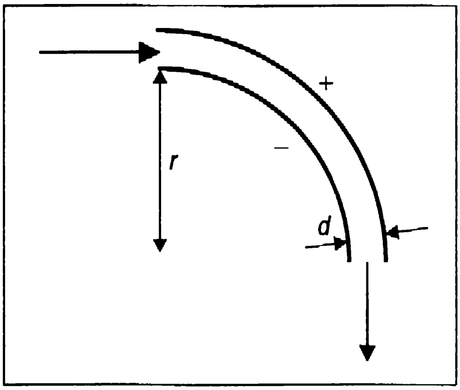
Фиг. 4.96



Фиг. 4.97

4.115. Електрон със скорост $v = 1,0.10^7$ m/s попада в област, в която е създадено магнитно поле, насочено успоредно на разделителната повърхност, както е показано на фиг. 4.97. Началната скорост на електрона сключва ъгъл α = 45° с границата на областта. Времето, през което електронът се движи в магнитното поле, е $t = 1,0.10^{-10}$ s. Пресметнете: а) индукцията B на магнитното поле; б) максималното разстояние d_{max}, на което електронът се отдалечава от разделителната повърхност.

4.116. Протон с кинетична енергия $E_k = 2,0.10^6$ eV попада в цилиндричен кондензатор с радиус на вътрешната плоча r = 10 cm и разстояние между плочите d = 1 mm (фиг. 4.98). Какво напрежение U трябва да бъде подадено между плочите, така че протонът да премине през кондензатора?



Фиг. 4.98

5. ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

Електростатично взаимодействие

1.8. $\eta = \dfrac{q\mu}{\rho V N_A e} \approx 7{,}4.10^{-5}$. **1.9.** $q = \eta Z \dfrac{\rho V N_A}{\mu} e \approx 0{,}35$ C. **1.10.** $N = \dfrac{r}{e}\sqrt{\dfrac{F}{k}} \approx 1{,}3.10^{9}$.

1.11. $F = k\left(\dfrac{\eta Z e m N_A}{\mu r}\right)^2 \approx 2.10^{15}$ N. **1.12.** $|q_2| = \left(1 + \dfrac{2n^2}{m} \pm \dfrac{2n^2}{m}\sqrt{1+\dfrac{m}{n^2}}\right)q_1$, като $|q_2| = 5q_1 = 8$ nC,

$|q_2| = \dfrac{1}{5}q_1 = 0{,}32$ nC. **1.13.** $q = r\sqrt{\dfrac{mg}{k}} \approx 1{,}7$ μC. **1.14.** $q = l\sqrt{\dfrac{mg}{k\sqrt{3}}} \approx 2{,}8$ μC.

1.15. $F = k\dfrac{q_1 N e}{\sqrt{2}r^2} \approx 1{,}7.10^{-11}$ N. **1.16.** $F = k\dfrac{q^2}{2R^2}\sqrt{13} \approx 18$ N.

1.17. Върху отрицателния заряд действа силата F, равнодействащата на силите на опън $\sqrt{3}T$ и равнодействащата на електричните сили на привличане $\sqrt{3}F_1$, насочени противоположно на F. Следователно

$$ma = F - \sqrt{3}(F_1 + T).$$

Върху един от положителните заряди действат няколко сили, равнодействащата на които е насочена по F. Положителният заряд не се движи в посока, перпендикулярна на F. Тогава имаме

$$F_1 = T + \frac{1}{2}(F_1 + T),$$

откъдето следва $F_1 = 3T$. От друга страна, този заряд се движи с ускорение a и

$$ma = \frac{\sqrt{3}}{2}(F_1 + T) = \frac{2}{\sqrt{3}}F_1.$$

Окончателно получаваме

$$a = \frac{2kq^2}{\sqrt{3}ml^2} \approx 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$F = \frac{2}{\sqrt{3}}F_1 = 2\sqrt{3}\frac{kq^2}{l^2} \approx 30\ \text{mN}.$$

Електростатично поле във вакуум

1.29. $\Delta q = \dfrac{r^2}{k}\Delta E = 1$ nC. **1.30.** Интензитетът на електричното поле няма да се измени, ако разстоянието нарасне с $\alpha = 20$ %. Потенциалът няма да се измени, ако разстоянието нарасне с $\beta = 44$ %.

1.31. $E = \dfrac{4E_A E_B}{\left(\sqrt{E_A} + \sqrt{E_B}\right)^2} = 16\ \dfrac{\text{V}}{\text{m}}$, $\varphi = \dfrac{2\varphi_A\varphi_B}{\varphi_A + \varphi_B} = 120$ V. **1.32.** а) $E = 0$, $\varphi = 2\varphi_1$; б) $E = 2E_1$, $\varphi = 0$.

1.33. а) $F = eE \approx 3{,}2.10^{-14}$ N и посока, противоположна на посоката на силовите линии;

б) $a = \dfrac{eE}{m} \approx 3{,}5.10^{16}\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$; в) $d = \left(n^2 - 1\right)\dfrac{mv_0^2}{2F} \approx 3{,}4$ μm; г) $U = \dfrac{A}{q} = -Ed \approx -0{,}7$ V.

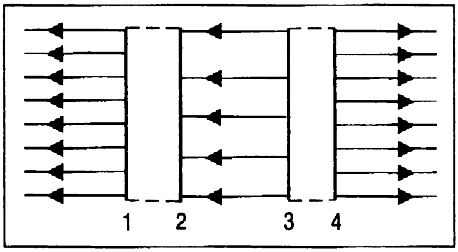
1.34. $E = k\dfrac{q_1}{a^2}\sqrt{1 + \left(\dfrac{q_2 a^2}{q_1 b^2}\right)^2} \approx 920\ \dfrac{\text{kV}}{\text{m}}$, $\varphi = k\dfrac{q_1}{a}\left(1 + \dfrac{q_2 a}{q_1 b}\right) \approx 42$ kV. **1.35.** $q_2 = \dfrac{2\varepsilon_0 S F_2}{q_1} \approx 885$ nC,

$q_3 = \left(1 - \dfrac{F_1}{F_2}\right)q_1 = 200$ nC. **1.36.** $\dfrac{q}{m} = \dfrac{3g}{E} = 1{,}5\ \dfrac{\text{C}}{\text{kg}}$.

1.37. Не. Покажете, че работата, извършена от електричната сила зависи от траекторията, по която става преместването. **1.38.** а) $A = -|q|Es = -0{,}5\ \mu J$; б) $\Delta W = -A = 0{,}5\ \mu J$; в) $U = \dfrac{A}{q} = 20\ V$. **1.39.** $\varphi_B - \varphi_A = -\dfrac{qs_2}{\varepsilon_0 S}$.

Проводници и диелектрици в електростатично поле

1.45. а) $q_1 = 2q$, $q_2 = -q$, $q_3 = q$, $q_4 = 2q$; б) фиг. 5.1.



Фиг. 5.1

1.46. а) $U = \dfrac{q}{\varepsilon_0 S}\dfrac{a(d-a)}{d}$; б) $\Delta q = q\dfrac{d-2a}{2d}$.

1.47. $q_1 = -q = -2\ mC$; $q_2 = q - q_1 = 2q = 4\ mC$. Зарядът на вътрешната повърхност е q_1, а на външната – q_2.

1.48. $\varphi = \dfrac{2\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2} = 48\ V$. **1.49.** Върху топчетата се индуцират заряди q_A и q_B, като $q_A + q_B = 0$. Тъй като

$$\varphi_A = k\frac{q_A}{r} + k\frac{q}{R},\quad \varphi_B = k\frac{q_B}{r},$$

от условието получаваме

$$q_A = -\frac{r}{2R}q < 0,\quad q_B = \frac{r}{2R}q > 0.$$

1.50. Преди поставянето на заземената сфера топчетата имат заряди q_1 и q_2 съответно, като:

$$q_1 + q_2 = q.$$

Освен това от равенството на потенциалите имаме

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

След поставяне в заземената сфера става преразпределение на заряда и топчетата придобиват заряди q_1' и q_2' съответно, като

$$q_1' + q_2' = q,$$

а сферата придобива заряд $-q_1'$. Тогава потенциалите на металните топчета са съответно

$$\varphi_1 = kq_1'\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right),\quad \varphi_2 = kq_2'\frac{1}{r_2}.$$

От условието $\varphi_1 = \varphi_2$ следва

$$q_1' = \frac{r_1 r q}{(r_1 + r_2)r - r_1 r_2}.$$

Тогава протеклият заряд по съединителния проводник е

$$\Delta q = q_1' - q_1 = \frac{r_1 r_2 q}{(r_1 + r_2)(3r_1 + 2r_2)}.$$

1.51. $q = \sqrt{\dfrac{F\varepsilon l^2}{k}} = 1{,}9.10^{-9}\ C$. **1.52.** $F = \dfrac{kq_1q_2}{\varepsilon R^2} = 74\ mN$, $r = \sqrt{\varepsilon}R = 27\ cm$.

1.53. $\rho = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\rho_0 = 1{,}2\ \dfrac{g}{cm^3}$. **1.54.** $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \dfrac{(q_1 - q_2)d}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}$.

Кондензатори

1.64. $q_1 = \frac{C_1(C_1+C_2)}{C_1+C_2+C_3}U = 3\ \mu C$, $q_2 = \frac{C_2}{C_1}q_1 = 6\ \mu C$, $q_3 = \frac{C_3}{C_1}q_1 = 9\ \mu C$. **1.65.** $q_1 = \frac{C_1^2(C_2+C_3)}{C_1C_2+C_2C_3+C_3C_1}U = 9\ \mu C$, $q_2 = \frac{C_1C_2C_3}{C_1C_2+C_2C_3+C_3C_1}U = 3\ \mu C$. **1.66.** $C = \frac{3}{2}C_0$. **1.67.** $C = \frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\varepsilon_0 S}{2d}$. **1.68.** $x = \frac{1}{\varepsilon+1}$. **1.69.** а) $\frac{C_1}{C} = \frac{C_2}{C} = \varepsilon+1$; б) $\frac{U_1}{U} = \frac{1}{\varepsilon+1}$, $\frac{U_2}{U} = 1$; в) $\frac{W_1}{W} = \frac{1}{\varepsilon+1}$, $\frac{W_2}{W} = \varepsilon+1$. **1.70.** $C_x = \frac{C}{2}$. **1.71.** а) $C_0 = \frac{2C_1C_2}{C_1+C_2}$; б) $C_0 = C$. Обяснете защо при подаване на напрежение на батериите от кондензатори напрежението между т. M и т. N е нула.

1.72. $Q = \frac{C_1C_2(U_1-U_2)^2}{2(C_1+C_2)} = 0{,}5$ mJ. **1.73.** а) $A = \Delta W = \frac{CU^2}{2} = 1.10^{-4}$ J; б) $A = \Delta W = -\frac{CU^2}{4} = -0{,}5.10^{-4}$ J.

В този случай извършената работа е

$$A = A' + A_{изт},$$

където A' е работата на външната сила при раздалечаването на пластините, $A_{изт}$ – работата на източника за поддържане на постоянно напрежение. Тъй като

$$A_{изт} = \Delta qU = -\frac{CU^2}{2} = -1.10^{-4}\ \text{J},$$

за работата A' имаме

$$A' = \frac{CU^2}{4} = 0{,}5.10^{-4}\ \text{J}.$$

Електрически вериги. Закон на Ом

1.83. $q = I_{ср}\Delta t = \left[I_0 + \frac{a(t_1+t_2)}{2}\right]\Delta t = 12$ C. **1.84.** $I = \frac{Qv}{2d_0}$. **1.85.** $R = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\rho}{C}$, $I = \frac{CU}{\rho\varepsilon\varepsilon_0}$. **1.86.** $R = \frac{\rho m}{\rho_0 S^2} \approx 7{,}5\ \Omega$, където ρ_0 е плътността на стоманата. **1.87.** а) $R = r$; б) $R = \frac{5}{3}r$; в) $R = \frac{2}{5}r$. **1.88.** $R = \frac{4}{5}r$. **1.89.** $r_V = \frac{U_1}{I_1}$, $r_A = \frac{U_3-U_1}{I_1} = \frac{U_3-U_2}{I_2}$, $R = \frac{U_1U_2}{U_1I_2-U_2I_1} = \frac{U_1I_3+U_3(I_1-I_3)}{I_1I_3}$. **1.90.** $R = \frac{8}{225}(2\rho_0 L + R_0)$.

1.91. $r = \frac{I_1R_1-I_2R_2}{I_2-I_1} = 2\ \Omega$, $\mathcal{E} = I_1(R_1+r) = 18$ V. **1.92.** $r = \frac{(\mathcal{E}-I_1R_1)R_2}{I_1(R_1+R_2)} = 3{,}2\ \Omega$.

1.93. $\varphi_A - \varphi_B = \frac{\mathcal{E}R_1R_2}{R_1R_2+(R_1+R_2)r} = 6$ V. **1.94.** а) $U' = \frac{2U_1U_2}{U_1+U_2} = 4$ V, б) $U'' = \frac{U_1U_2}{2U_1-U_2} = 2$ V.

Работа и мощност. Закон на Джаул–Ленц

1.102. $Q_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2}.\frac{CU^2}{2}$, $Q_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2}.\frac{CU^2}{2}$. **1.103.** $Q = A_{изт} - \Delta W = 8CU^2$. **1.104.** $\Delta t = \frac{U^2\tau}{R(mc+C)} \approx 56\ °C$, където $c = 4{,}2.10^3$ J/kg.K е специфичният топлинен капацитет на водата. **1.105.** $r = \frac{P_1I_2-P_2I_1}{I_1I_2(I_2-I_1)} = 2{,}5\ m\Omega$.

1.106. $R_x = \frac{Rr^2}{R^2-r^2}$. **1.107.** $I_0 = (\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2})\sqrt{\frac{P}{R_1R_2}} \approx 1{,}63$ A. **1.108.** а) $I = \frac{\mathcal{E}}{2r}(1\pm\sqrt{1-\alpha})$;

б) $U = \frac{\mathcal{E}}{2}(1 \pm \sqrt{1-\alpha})$; в) $R = r\frac{2-\alpha \pm \sqrt{1-\alpha}}{\alpha}$, където $\alpha = \frac{4rP}{\mathcal{E}^2}$. **1.109.** $P_1 \approx 2{,}7.10^2$ W. **1.110.** $\mathcal{E} = 9$ V.
1.111. $x = \frac{P_R}{P} = \frac{U - NU_0}{U} = 0{,}45$. **1.112.** $\eta_{\text{посл}} > \eta_{\text{усп}}$.

Електричен ток в различни среди

1.120. $\frac{v_1}{v_2} = 4$. **1.121.** $v = \frac{\mu E}{eN_A\rho_0\rho} \approx 0{,}7\ \frac{\text{mm}}{\text{s}}$, където ρ_0 е плътността, а ρ – специфичното съпротивление на среброто. **1.122.** $t = t_0 + \left(\frac{U^2 l_1}{\rho U_1} - 1\right)\frac{1}{\alpha} \approx 2540\ ^\circ\text{C}$. **1.123.** $\alpha = \frac{n_{\text{Al}}}{n_{\text{Si}}} \approx 0{,}006$. **1.124.** $R' = \frac{R}{3} = 10\ \Omega$, $R'' = 3R = 90\ \Omega$. **1.125.** $d = k\frac{Pt}{\rho US} \approx 11\ \mu\text{m}$. **1.126.** $I = 10\ \mu\text{A}$, $U = 3$ kV.

Магнитно взаимодействие

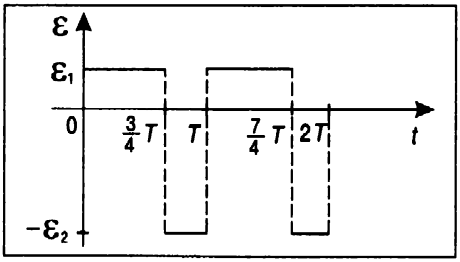
1.133. $I \geq \frac{2T - mg}{Bl} = 35$ A. **1.134.** а), б) Магнитното поле действа на рамката със сили, които лежат в равнината й, и се стремят да я „разтегнат". в) трябва да се промени или посоката на тока, или посоката на магнитното поле. **1.135.** $B = 0$. **1.136.** $B = \frac{\mu_0 I}{\pi r}\sqrt{1 - \left(\frac{l}{2r}\right)^2} \approx 3{,}6.10^{-5}$ T. **1.137.** $F = \frac{q^2 EB\Delta t}{m} = 250$ N.

Електромагнитна индукция

1.144. а) не; б) не; в) да. **1.145.** $q = \frac{rB}{4\rho}$. **1.146.** $\mathcal{E}_1 = \frac{3B_0S}{4T}$, $\mathcal{E}_2 = \frac{4B_0S}{T}$, фиг. 5.2.

1.147. $R = \frac{vB^2l^2}{mg} = 2{,}5\ \text{m}\Omega$. **1.148.** а) $v = \frac{FR}{B^2l^2} = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; б) $P = \frac{F^2R}{B^2l^2} = 2{,}5.10^{-5}$ W.

1.149. $q = \frac{\Delta\Phi - L\Delta I}{R} = 2{,}5.10^{-5}$ C.



Фиг. 5.2

Променлив ток. Трансформатори

1.155. $x = \frac{1}{2}$. **1.156.** $U_{\text{еф}} = \frac{2}{\sqrt{5}}U_0$. **1.157.** $N_2 = \frac{N_1(U_2 - I_2R_2)}{U_1} = 300$. **1.158.** $R = \frac{kU_1 - I_2R_2}{I_2} = 2\ \Omega$, $U_2 = kU_1 - I_2R_2 = 10$ V. **1.159.** $U_2 = \frac{kU_1R}{R + R_2} = 20$ V. **1.160.** $I_2 = \eta\frac{U_1I_1}{U_2} = 11$ A.

Пружинно и математично махало

2.13. $M = 3$ kg. **2.14.** $F_{max} = 4\pi^2\nu^2 A \approx 20$ N.

2.15. Означаваме с m масата на окаченото тяло. От условието за равновесие намираме $mg = k\Delta l$, откъдето $\frac{m}{k} = \frac{\Delta l}{g}$. Като използваме формулата за период на пружинно махало, получаваме $T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}$ $= 2.3{,}14.\sqrt{\frac{0{,}10\text{ m}}{9{,}8\text{ m/s}^2}} \approx 0{,}63$ s.

2.16. а) Състоянието, когато пружината е недеформирана, съответства на крайно горно положение на трептящата платформа. От дефиницията на амплитуда следва, че равновесното състояние на системата се намира на разстояние A по-надолу, т.е. тогава, когато пружината е свита с A. От условието за равновесие $mg = kA$ намираме

$$k = \frac{mg}{A} = \frac{80\text{ kg . }9{,}8\text{ m/s}^2}{0{,}20\text{ m}} \approx 3900\text{ N/m}.$$

б) $T = 2\pi\sqrt{\frac{A}{g}} \approx 0{,}90$ s.

2.17. а) 3,4 m/s; б) 2 s, 0,5 Hz; в) $\approx$ 1,1 m.

2.18. При отклонение x на тялото едната пружина се разтяга с $\Delta l_1 = x$, а другата – се свива с $\Delta l_2 = -x$. Силите на еластичност, с които двете пружини действат върху тялото, са еднопосочни и тяхната равнодействаща е

$$F = k_1|\Delta l_1| + k_2|\Delta l_2| = (k_1 + k_2)|x|.$$

Следователно коефициентът на пропорционалност между връщащата сила и отместването е $k = (k_1 + k_2)$ и честотата на трептене се дава с формулата

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}.$$

2.19. а) В момента, когато пружината е максимално свита, нейната потенциална енергия е $E_п = \frac{k(l_0 - l)^2}{2}$, а кинетичната енергия на сачмата е нула. В момента, когато сачмата излита, тя има кинетична енергия $E_к = \frac{mv^2}{2}$, а пружината не е деформирана и потенциалната ѝ енергия е нула. Ако пренебрегнем силите на триене между сачмата и цевта, от закона за запазване на енергията имаме $\frac{mv^2}{2} = \frac{k(l_0 - l)^2}{2}$.

Оттук намираме $v = \sqrt{\frac{k}{m}}(l_0 - l) \approx 2{,}5$ m/s.

б) Сачмата се допира до пружината в продължение една четвърт от периода, съответстващ на пружинно махало с маса m и коефициент на еластичност k:

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 1{,}57.10^{-2}\text{ s}.$$

След като се отдели от пружината, сачмата изминава в цевта разстояние $s = L - l_0$ с постоянна скорост v за време

$$t_2 = \frac{L - l_0}{v} = \frac{L - l_0}{l_0 - l}\sqrt{\frac{m}{k}} = 2{,}0.10^{-2}\text{ s}.$$

Общото време на движение на сачмата в цевта е $t = t_1 + t_2 \approx 3{,}57.10^{-2}$ s.

в) Приемаме положението на сачмата преди изстрела като нулево ниво на гравитационната потенциална енергия. Следователно в началното състояние механичната енергия на системата се състои единствено от потенциална енергия на деформираната пружина $E_{нач} = \frac{k(l_0 - l)^2}{2}$. В крайното състояние, когато сачмата излиза от цевта, механичната енергия на системата се състои от кинетична енергия на сачмата и гравитационна потенциална енергия $E_{кр} = \frac{mv_1^2}{2} + mg(L - l)$. Ако пренебрегнем силите на триене, $E_{нач} = E_{кр}$, откъдето намираме

$$v_1 = \sqrt{v^2 - 2g(L - l)} \approx 2{,}2\text{ m/s}.$$

2.20. Когато едното топче е отклонено на разстояние x в едната посока, то другото топче е отклонено на същото разстояние в противоположната посока. Удължението на пружината е $\Delta l = 2x$. Съответно върху топчетата действат сили на еластичност с еднакви големини $F_1 = F_2 = 2kx$, насочени в противоположни посоки. Следователно коефициентът на пропорционалност между връщащите сили и отклоненията на топчетата е $k_1 = 2k$ и двете топчета трептят едно срещу друго с еднакви честоти

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

2.21. Не се променя, защото периодът на математичното махало не зависи от масата на закаченото тяло.

2.22. а) $\approx 0{,}25$ m; б) ≈ 25 m.

2.23. Ако топчето не се удряше в стената, то би се люляло с период $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Независимо от скоростта, с която топчето отскача, то ще се удари следващия път в стената след време $\Delta t = \dfrac{T}{2} = \pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Понеже между първия удар и десетия удар изминават 9 полупериода, общото време е

$$t = 9\Delta t = 9\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 9{,}0\ \mathrm{s}.$$

2.24. При преминаване през равновесното си положение тежинката на махалото се намира на височина $h = \dfrac{\pi^2 - 8}{8}l = 47$ cm над тялото, което пада свободно. *Упътване.* Тежинката достига равновесното си положение след една четвърт от периода на трептене независимо колко малко е началното ѝ отклонение.

2.25. Като използваме закона за запазване на енергията

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(1-\cos\theta),$$

намираме дължината на махалото $l = \dfrac{v^2}{2g(1-\cos\theta)}$ и оттам неговия период

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\sqrt{2}\pi v}{g\sqrt{(1-\cos\theta)}} \approx 4{,}9\ \mathrm{s}.$$

2.26. На топчето с обем V и маса m, потопено във вода, действат силата на тежестта: $G = mg = \rho Vg$, Архимедовата сила: $F_A = \rho_0 Vg$ и силата T на опъване на нишката. Равнодействащата R на силата на тежестта и Архимедовата сила е

$$R = G - F_A = (\rho - \rho_0)Vg.$$

и е насочена вертикално надолу. Равнодействащата F на R и T е перпендикулярна на нишката, както е показано на фиг. 2.9 в пример 2.12, и нейната големина е

$$F = R\sin\theta = (\rho - \rho_0)Vg\sin\theta.$$

При малки отклонения x от равновесното положение получаваме

$$F = \frac{(\rho-\rho_0)Vg}{l}x.$$

Коефициентът на пропорционалност между връщащата сила и отклонението е съответно

$$k = \frac{(\rho-\rho_0)Vg}{l} = \frac{(\rho-\rho_0)mg}{\rho l},$$

където сме отчели, че $m = \rho V$. Следователно периодът на трептене е

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho l}{(\rho-\rho_0)g}} \approx 1{,}3\ \mathrm{s}.$$

Трептящи системи

2.34. $\nu = \nu_0\sqrt{1+\frac{2(l-l_0)}{l}} \approx 2{,}4$ Hz. **2.35.** а) $h_0 = \frac{(\rho_B - \rho_{He})V - m_0}{\mu} = 0{,}5$ m; б) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_B V}{\mu g}} \approx 1{,}6$ s.

2.36. $\nu = \frac{q}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{md^3}}$, където $k = 9.10^9$ N.m^2/C^2 е константата в закона на Кулон.

2.37. $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}$.

2.38. В хоризонтална посока върху трупчето действа само силата на триене f от страна на платформата. От II принцип на Нютон имаме $ma = f$, а от връзката между големината a на ускорението и абсолютната стойност $|x|$ на отклонението при хармонично трептене – $a = 4\pi^2\nu^2|x|$. От тези две уравнения получаваме зависимост между големината на отклонението и силата на триене: $|x| = \frac{f}{4m\pi^2\nu^2}$. Трупчето ще започне да се хлъзга при такова отклонение, за което $f = 1/3\, mg$. Следователно минималната амплитуда, при която трупчето ще се хлъзга, е $A_{\min} = \frac{g}{12\pi^2\nu^2}$.

Механични вълни. Звук

2.51. От мястото на падане на двата камъка започват да се разпространяват кръгови вълни. Колкото по-рано е хвърлен даден камък, толкова по-голямо разстояние изминава съответният вълнов фронт. Следователно по-рано е хвърлен този камък, който е предизвикал вълна с по-голям радиус на вълновия фронт.

2.52. $H \approx 1080$ m. *Упътване*. Не забравяйте да отчетете времето, необходимо на звука от падането да достигне върха на каньона.

2.53. $v \approx 1450$ m/s. **2.54.** Точка A – нагоре, точка B – надолу. **2.55.** а) $x \approx 4{,}5$ mm; б) $\nu \approx 1{,}4.10^6$ Hz.

2.56. $v = 4$ m/s. **2.57.** $\lambda = \frac{gT^2}{2\pi} \approx 14$ m.

2.58. Като използваме формулата, получена в зад. 2.57, намираме скоростта, с която вълните се движат по морската повърхност:

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{gT}{2\pi} \approx 4{,}7 \text{ m/s}.$$

Понеже лодката се движи срещу вълните, вълновите гребени се движат спрямо нея с относителна скорост: $u_1 = u + v$, където v е скоростта на лодката спрямо водата. Следователно периодът на люлеене на лодката е

$$T_1 = \frac{\lambda}{u+v} \approx 2{,}1 \text{ s}.$$

2.59. Дължината на вълната се дава с формулата $\lambda = \frac{u}{\nu}$. Следователно при дадена честота ν дължината на вълната се променя толкова пъти, колкото пъти се променя скоростта u. От своя страна скоростта на напречните вълни по опънатата струна се дава с израза $u = \sqrt{F/\mu}$, където F е силата на опъване, а μ – масата на единица дължина от струната. Следователно

а) Ако същата струна (μ не се променя) е опъната с два пъти по-голяма сила, скоростта и дължината на вълната нарастват $\sqrt{2}$ пъти.

б) Ако изберем струна с два пъти по-голям диаметър, площта на напречното сечение на новата струна е 4 пъти по-голяма. Един метър от новата струна има 4 пъти по-голям обем и 4 пъти по-голяма маса, отколкото има един метър от старата струна, т.е. μ се увеличава също 4 пъти. При една и съща сила на опъване скоростта и дължината на вълната намаляват съответно $\sqrt{4} = 2$ пъти.

2.60. $F \approx 11$ N. **2.61.** $\nu \approx 210$ Hz.

2.62. Звуковите вълни се предават по корпуса на самолета, както и във въздуха вътре в самолета. Следователно звукът на двигателите достига кабината на пилота дори когато самолетът е свръхзвуков.

2.63. Силният грък, който чува външният наблюдател, се дължи на рязкото изменение на налягането на въздуха, предизвикано от преминаващия фронт на ударната вълна. Понеже областта с повишено налягане, свързана с ударната вълна, е неподвижна спрямо самолета, налягането, което тя оказва върху самолета, не се променя. Следователно фронтът на ударната вълна не предизвиква слухово възприятие за хората, които се намират в самолета.

2.64. $t = \frac{h}{u}\sqrt{1-\left(\frac{u}{v}\right)^2} \approx 13\,\text{s}$. С h е означена височината, на която лети самолетът, с v – неговата скорост, а с u – скоростта на звука. *Указание.* Наблюдателят чува звука от самолета, когато фронтът на ударната вълна (конусът на Мах) стигне до него. Можете да използвате тригонометричното тъждество $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$.

Електромагнитни трептения и вълни

2.69. а) Увеличава се $\sqrt{2}$ пъти; б) Намалява 2 пъти.
2.70. $\nu \approx 1{,}13.10^6 - 3{,}37.10^6\,\text{Hz}$; $\lambda \approx 267 - 89\,\text{m}$.
2.71. $C_1 \approx 4{,}5.10^{-13}\,\text{F}$; $C_2 \approx 3{,}0.10^{-13}\,\text{F}$.
2.72. Преди отварянето на ключа през резистора и намотката протича ток $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$, а напрежението върху кондензатора е нула. Енергията, натрупана в намотката, е $W_L = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R^2}$. След отваряне на ключа през резистора престава да тече ток, а токът, течащ през намотката, се пренасочва към кондензатора и започва да го зарежда. Зареждането на кондензатора продължава, докато енергията, натрупана в намотката, се трансформира изцяло в енергия на електричното поле в кондензатора: $\frac{L\mathcal{E}^2}{2R^2} = \frac{CU_{max}^2}{2}$. Оттук получаваме $U_{max} = \frac{\mathcal{E}}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$. Максималното напрежение върху кондензатора може да стане по-голямо от ЕДН на източника, ако е изпълнено условието $\sqrt{\frac{L}{C}} > R$.

2.73. $C = \frac{I_{max}T}{2\pi U_{max}}$; $L = \frac{U_{max}T}{2\pi I_{max}}$, където U_{max} и I_{max} са съответно максималните стойности на напрежението и на тока, а T е периодът на трептенето.

Отражение и пречупване на светлината

3.10. $\text{tg}\alpha = n = \sqrt{3}$ или $\alpha = 60°$.

3.11. $n = \dfrac{\sin\left(\frac{\delta+\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \approx 1{,}74$.

3.12. $x > \frac{R}{n} = 3\,\text{cm}$. *Упътване* Лъчът няма да премине през кръговата повърхност, ако пада върху нея под ъгъл, по-голям от ъгъла на пълно вътрешно отражение за границата стъкло–въздух.
3.13. Падащият лъч е перпендикулярен на цилиндричната повърхност и не се пречупва, когато преминава през нея. Ъгълът на падане към плоската повърхност е $\alpha = 90° - \theta = 30°$. Ъгълът на пречупване от плоската повърхност на свой ред е: $\beta = \alpha + \delta = 50°$. От закона на Снелиус $n\sin\alpha = 1.\sin\beta$ намираме

$$n = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin 50°}{\sin 30°} \approx \frac{0{,}776}{0{,}5} \approx 1{,}53.$$

3.14. Сянката се удължава с $\Delta l = d\left(1 - \frac{h}{\sqrt{n^2l^2 + (n^2-1)h^2}}\right) \approx 0{,}6\,\text{cm}$.

Интерференция и дифракция

3.20. $N = 7$.

3.21. $\Delta x_1 = \dfrac{\Delta x}{n} \approx 1{,}5$ mm.

3.22. $d_{ср} = 4940$ nm; $\Delta d = 174$ nm или $d = (4940 \pm 174)$ nm.

3.23. а) $\sin\theta_1 = 5/6$ или $\theta_1 \approx 56{,}4°$, $\theta_0 = 30°$, $\sin\theta_{-1} = 1/6$ или $\theta_{-1} \approx 9{,}6°$; б) $N = 6$.

Топлинно излъчване и светлинни кванти

3.42. Всяко тяло, освен че излъчва, поглъща лъченията, излъчени от другите тела в стаята, както и от стените на стаята. При условие че всички тела в стаята се намират при еднаква температура, количеството енергия, което дадено тяло излъчва за определено време, е равно на количеството енергия, която то поглъща за същото време, т.е. неговата температура не се променя.

3.43. Металното фолио отразява обратно в съда топлинното излъчване на ястието, като не му позволява да губи топлина. Също така топлинното излъчване от самото фолио към околната среда е много слабо поради малкия коефициент на чернота на фолиото.

3.44. ≈ 4 %.

3.45. От уравнението за топлинния баланс имаме: $mc\Delta T = e\sigma T^4 S\tau$, където τ е търсеното време. Като вземем предвид, че $m = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ и $S = 4\pi R^2$, където R е радиусът на кълбото, намираме

$$\tau = \frac{\rho Rc\Delta T}{3e\sigma T^4} \approx 5100\ \text{s}.$$

3.46. Като отчетем, че тялото не само излъчва, но и поглъща топлинното излъчване на околните предмети, получаваме

$$Q = \sigma(T_1^4 - T_2^4)St,$$

където T_1 и T_2 са съответно температурите на тялото и на околната среда, S – площта на кожата, а t – продължителността на едно денонощие. Като заместим с данните от условието, намираме $Q \approx 13$ MJ.

3.47. $T \approx 5800$ K. Резултатът се различава с около 100 K от оценката, получена в пример 3.36. Това показва, че Слънцето не е абсолютно черно тяло и законите на Стефан–Болцман и Вин могат да бъдат използвани само за по-груби числени оценки.

3.48. Ако означим с h височината на сондата над слънчевата повърхност, разстоянието от сондата до центъра на Слънцето е $R + h$, където R е радиусът на Слънцето. Като следваме разсъжденията от пример 3.36, изразяваме интензитета на топлинното излъчване на Слънцето на тази височина:

$$E = \frac{\sigma T^4 R^2}{(R+h)^2}.$$

Означаваме с T_1 максималната температура, до която може да се загрее защитният слой. При условие че температурата на защитния слой е постоянна, количеството топлина, което той поглъща от излъчването на Слънцето, е равно на количеството топлина, което самият слой излъчва (вж. пример 3.35):

$$E\pi r^2 = \sigma T_1^4 4\pi r^2.$$

Така стигаме до уравнението

$$\frac{T^4 R^2}{(R+h)^2} = 4T_1^4,$$

откъдето намираме търсената височина

$$h = R\left(\frac{T^2}{2T_1^2} - 1\right) = 17R \approx 1{,}2 \cdot 10^7\ \text{km}.$$

3.49. $\approx 10^{16}$ фотона в секунда.

3.50. Върху фотографския филм е нанесен слой, съдържащ сребърни соли. При облъчване със светлина солите дисоциират, като се отделя метално сребро, което води до потъмняване на осветеното място – т.нар. експониране или осветяване на филма. За експониране на филма е необходимо фотоните на падащата светлина да имат енергия, по-голяма от енергията на дисоциация на сребърните соли – около 1,9 eV. Фотоните с дължина на вълната, по-голяма от 650 nm, т.е. намиращи се в червената област на спектъра, имат енергия, по-ниска от 1,9 eV, и следователно не водят до експониране на филма.
3.51. Няма, защото енергията на фотона е по-малка от отделителната работа на калия.
3.52. $A = 1{,}8$ eV; $\lambda = 687$ nm.
3.53. $P \approx 1{,}3.10^{-2}$ W.

Движение с постоянно ускорение

4.7. а) $H = \dfrac{v_0^2}{2g} \approx 46$ m; б) $t_п = \dfrac{2v_0}{g} \approx 6.1$ s; в) $h = \dfrac{3v_0^2}{8g} \approx 34$ m; $t_1 = \dfrac{v_0}{2g} \approx 1{,}5$ s; $t_2 = \dfrac{3v_0}{2g} \approx 4{,}6$ s.

4.8. а) $v = \sqrt{v_1^2 + \left(\dfrac{gL}{v_1}\right)^2} \approx 11\,\text{m/s}$; б) $v_2 = \dfrac{gL}{v_1} = 9{,}8\,\text{m/s}$; в) $v_0 = \sqrt{gL} = 7{,}0\,\text{m/s}$.

4.9. а) $H/L = 1/2$; б) $\text{tg}\alpha = 2$ или $\alpha \approx 63{,}4°$. **4.10.** $t_п \approx 58$ s. **4.11.** а) 10 km; б) $\approx 11{,}5$ km;
4.12. $H \approx 1{,}8$ m. *Упътване.* Използвайте факта, че хоризонталната компонента на скоростта е постоянна по време на полета.
4.13. $\alpha = 60°$. *Упътване.* Използвайте факта, че хоризонталната компонента на скоростта е постоянна по време на полета.
4.14. $L \approx 22$ m; $\text{tg}\alpha \approx 0{,}276$ или $\alpha \approx 15{,}4$ °. **4.15.** $L = \dfrac{2v_0^2}{g} \approx 32{,}6\,\text{km}$.

4.16. $\theta = 30°$. *Упътване.* Хоризонталната компонента на скоростта на снаряда трябва да бъде равна на скоростта на самолета.

4.17. $L = v_1 v_2 \sqrt{\dfrac{2h}{g\left(v_2^2 - v_1^2\right)}} \approx 86\,\text{cm}$.

Движение по окръжност

4.23. $t = 200$ s.
4.24. Вагонетката се движи равноускорително с ускорение $a = \varepsilon r = 0{,}02$ m/s^2. Тя ще бъде изтеглена от галерията за време $t = \sqrt{\dfrac{2l}{\varepsilon r}} \approx 71\,\text{s}$.

4.25. *Решение:* Ако велосипедът се движи със скорост v, то парчето кал излита от най-високата точка със скорост $v_0 = 2v$ в хоризонтално направление. То достига земята за време $t = 2\sqrt{\dfrac{R}{g}}$, като изминава разстояние $x_1 = v_0 t = 4v\sqrt{\dfrac{R}{g}}$. За същото време колелото се премества на разстояние $x_1 = vt = 2v\sqrt{\dfrac{R}{g}}$. Следователно парчето кал пада на разстояние $s = x_1 - x_2 = 2v\sqrt{\dfrac{R}{g}} \approx 1{,}75\,\text{m}$ пред гумата.

4.26. $v = \omega l \sin 60° \approx 1{,}73\,\text{m/s}$; $a_c = \omega^2 l \sin 60° \approx 17{,}3\,\text{m/s}^2$.
4.27. *Решение:* При навлизане в завоя автомобилът има центростремително ускорение: $a_c = \dfrac{v_0^2}{r} = 4{,}5\,\text{m/s}^2$. След като шофьорът натисне спирачката, автомобилът получава допълнително тангенциално ускорение $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = -k = -2\,\text{m/s}^2$. Следователно пълното ускорение на автомобила, след като навлезе в завоя, е $a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} \approx 4{,}9\,\text{m/s}^2$.

Движение под действие на постоянни сили

4.36. а) 10 m/s^2; б) $\approx 8{,}7 \text{ m/s}^2$; в) $\approx 7{,}1 \text{ m/s}^2$; г) 5 m/s^2.

4.37. $s = \dfrac{v_0^2}{kg} \approx 20 \text{ m}$. **4.38.** а) $k = \dfrac{4-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-1} \approx 0{,}38$; б) $\operatorname{tg}\alpha_{min} = k$ или $\alpha_{min} \approx 21°$.

4.39. *Решение:* При движение с постоянна скорост силата на триене f уравновесява успоредните на равнината компоненти на теглителната сила F и силата на тежестта G: $f = F\cos 60° - mg\sin 15°$. Съответно силата на нормална реакция на опората се дава с израза $R = mg\cos 15° - F\sin 60°$. Следователно коефициентът на триене между сандъка и равнината е $k = \dfrac{F\cos 60° - mg\sin 15°}{mg\cos 15° - F\sin 60°} \approx 0{,}11$.

4.40. $a = g\left(\sin\alpha - \dfrac{k_1m_1 + k_2m_2}{m_1 + m_2}\cos\alpha\right) \approx 2{,}1 \text{ m/s}^2$; $F = \dfrac{(k_2 - k_1)m_1m_2g\sin\alpha}{m_1 + m_2} \approx 0{,}065 \text{ N}$.

4.41. $f = 2{,}9$ N. **4.42.** $a = \dfrac{(m_1\sin\alpha - m_2\sin\beta)g}{m_1 + m_2}$. **4.43.** $a = \dfrac{(m_2 - km_1)g}{m_1 + m_2}$.

4.44. $m_{2\max} = \dfrac{m_1T_{\max}}{2m_1g - T_{\max}} \approx 0{,}34 \text{ kg}$. **4.45.** $a_1 = \dfrac{m_1g\sin^2\alpha}{m_1\sin^2\alpha + m_2\cos^2\alpha}$; $a_2 = \dfrac{m_1g\sin\alpha\cos\alpha}{m_1\sin^2\alpha + m_2\cos^2\alpha}$.

Динамика на движение по окръжност

4.51. $v = \sqrt{Mmgl}$. **4.52.** $T_1 = 3m\omega^2 l$ за нишката, която свързва първото топче и оста, и $T_2 = 2m\omega^2 l$ за нишката, която свързва двете топчета.

4.53. $l = \dfrac{v^2}{g\cos\alpha}$. **4.54.** $T = \dfrac{m\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\omega^2 r}{2} + g\right)$; $\omega_{\max} = \sqrt{\dfrac{2g}{3r}}$. *Упътване.* При зададената дължина на нишката правата, която свързва центъра на полусферата с топчето, сключва ъгъл 60° с вертикалата. Съответно радиусът на окръжността, по която обикаля топчето, е $\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$.

4.55. $M = \dfrac{4\pi^2a^3}{\gamma T^2} \approx 2{,}0.10^{30} \text{ kg}$. **4.56.** $v = \sqrt{gR} \approx 7{,}9.10^3 \text{ m/s}$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}} \approx 5{,}1.10^3 \text{ s} \approx 1 \text{ h } 24 \text{ min}$.

4.57. $r \approx 3{,}9.10^5$ km. **4.58.** $T \approx 154$ г. **4.59.** $T = \sqrt{\dfrac{3\pi}{\gamma\rho}}$. **4.60.** $R \approx 5{,}9$ m.

4.61. $N_1 \approx 1800$ N в най-ниската част от лупинга и $N_2 \approx 600$ N – в най-високата. **4.62.** $N \approx 800$ N.

Закон за запазване на импулса

4.70. $\Delta t = \dfrac{mv}{F} = 3$ s. **4.71.** а) $p = 0$; б) $p = 2{,}4\ \dfrac{\text{kg.m}}{\text{s}}$; в) $p = 1{,}2\ \dfrac{\text{kg.m}}{\text{s}}$, векторът $\vec{p}$ сключва ъгъл $\beta = 60°$ с векторите $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$. **4.72.** $v = \dfrac{1}{6}v_0 = 0{,}5\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$. **4.73.** а) $u_1 = \dfrac{199v_1 - v_2}{200} \approx v_1 - \dfrac{v_2}{200} \approx 1\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$, насочена по първоначалната посока на движение на платформата; б) $u_2 \approx v_1 - \dfrac{v_2\cos\alpha}{200} \approx 3\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$, насочена по първоначалната посока на движение на платформата. **4.74.** $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta}$. Начертайте векторната диаграма, която изразява закона за запазване на импулса. Означете с θ_1 и θ_2 ъглите, които векторите $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ сключват с $\vec{p}$. Изберете две взаимно перпендикулярни оси, едната от които насочена по $\vec{p}$, и проектирайте векторното равенство $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$.

4.75. $v_1 = \dfrac{(m_1+m_2)v_0 - m_2v_2}{m_1} = -12{,}5\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$, скоростта на шрапнела 1 е хоризонтална и насочена противоположно на скоростта на гранатата.

4.76. $v_1 = v + \dfrac{m}{M+m}u,\ u_2 = v,\ v_3 = v - \dfrac{m}{M+m}u$. **4.77.** $m = \dfrac{1}{3}m_0$. **4.78.** $s = \dfrac{m}{m+M}l = 1\ \text{m}$.

Работа и енергия. Закон за запазване на енергията

4.91. $A_1 = \dfrac{F_1^2 s}{\sqrt{F_1^2+F_2^2}} = 180\ \text{J};\ A_2 = \dfrac{F_2^2 s}{\sqrt{F_1^2+F_2^2}} = 320\ \text{J};\ A = s\sqrt{F_1^2+F_2^2} = 500\ \text{J}$. Обърнете внимание на факта, че $A = A_1 + A_2$! **4.92.** $k \approx \dfrac{\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2}{v_2 - v_1} = 0{,}01$. **4.93.** $k = \dfrac{A}{l^2} = 50\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}}$. Работата, извършена от външната сила, е равна по абсолютна стойност на сумата от работата на еластичната сила и силата на триене.

4.94. $v = \sqrt{v_0^2 - kg(2L-l)} \approx 3{,}2\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$. **4.95.** $l = \dfrac{v^2}{kg} \approx 3{,}2\ \text{m}$. **4.96.** $A = -\dfrac{mMv^2}{2(m+M)} \approx -1{,}7\ \text{J}$.

4.97. $T = \dfrac{3 - 2\cos\alpha_0 - \eta}{1-\eta}mg$. **4.98.** $N = 0$. **4.99.** $T = 6mg$. **4.100.** $h = \dfrac{25}{27}l$. При движението на топчето има два етапа. Първият е движение по окръжност, докато опъването на нишката стане равно на нула, а вторият – движение на тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта.

4.101. $k = \sqrt{\dfrac{2mgh}{k}\left[1 - \mu\left(\text{cotg}\alpha + \dfrac{\text{s}}{\text{h}}\right)\right]} \approx 0{,}5\ \text{m}$. **4.102.** а) $\text{v}_1 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{M}},\ \text{v}_2 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$;

б) $A_1 = \dfrac{2mv}{(M+m)}\sqrt{\dfrac{M}{k}},\ A_2 = \sqrt{\left(\dfrac{mg}{k}\right)^2 + \dfrac{m^2v^2}{k(M+m)}}$; в) $h_1 = A_1,\ h_2 = A_2 - \dfrac{mg}{k}$.

4.103. $h = \dfrac{8mg}{k} \approx 0{,}4\ \text{m}$. При трептене на горното топче долното ще подскочи, когато силата, с която му действа разтегнатата пружина, е по-голяма или равна на mg.

4.104. $h = \dfrac{H}{\left(1+\dfrac{m}{M}\right)^2} \approx 0{,}48\ \text{m}$. От законите за запазване на импулса и енергията намираме скоростта v на шайбата в основата на първия клин –

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1+\frac{m}{M}}}.$$

При достигането на максималната височина h шайбата и вторият клин имат еднакви скорости. От законите за запазване на импулса и енергията за системата шайба–втори клин намираме h.

Движение на заредени частици в електрични и магнитни полета

4.113. $v_1 = \sqrt{\dfrac{eU_0}{2m}\left(1+\dfrac{E^2d^2}{U_0^2}\right)} \approx 4{,}2.10^{-7}\ \text{m/s};\ tg\theta = \dfrac{Ed}{2U_0} = 1{,}25.10^{-4}$.

4.114. $E_к = \dfrac{e^2B^2d^2}{2m(1-\cos\alpha)^2} \approx 4.3.10^{-18}\ \text{J} \approx 27\ \text{eV}$. **4.115.** $B = \dfrac{3\pi m}{2qt} \approx 0{,}27\ \text{T};\ d_{max} = \dfrac{(2+\sqrt{2})vt}{3\pi} \approx 0{,}36\ \text{mm}$.

4.116. $U = \dfrac{2E_к d}{er} = 40\ \text{kV}$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Основни физични константи

Скорост на светлината във вакуум	$c = 3,0.10^8$ m/s
Гравитационна константа	$\gamma = 6,67.10^{-11}$ m^3/(kg.s^2)
Земно ускорение	$g = 9,8$ m/s^2
Число на Авогадро	$N_A = 6,02.10^{23}$ mol^{-1}
Елементарен заряд	$e = 1,6.10^{-19}$ C
Маса на електрона	$m_e = 9,1.10^{-31}$ kg
Маса на протона (неутрона)	$m_p = 1,67.10^{-27}$ kg
Електрична константа	$\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}$ F/m $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$ m/F
Магнитна константа	$\mu_0 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 c^2} = 4\pi.10^{-7}$ H/m $= 1,26.10^{-6}$ H/m
Константа на Фарадей	$F = 9,65.10^4$ C/mol
Константа на Планк	$h = 6,63.10^{-34}$ J.s $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1,05.10^{-34}$ J.s

ТАБЛИЦИ

1. Плътност на веществата

Твърди тела			
	10^3 kg/m^3		10^3 kg/m^3
Алуминий	2,7	Мед	8,9
Желязо	7,8	Никел	8,9
Злато	19,3	Олово	11,3
Калай	7,3	Сребро	10,5
Течности			
	10^3 kg/m^3		10^3 kg/m^3
Бензин	0,70	Нефт	0,90
Вода	1,0	Солена вода	1,03
Живак	13,6	Спирт	0,80

2. Диелектрични проницаемости на веществата

Вода	81	Порцелан	5
Въздух	1,00058	Слюда	6
Машинно масло	2,2	Стъкло	7
Парафин	2	Текстолит	7

3. Специфично съпротивление ρ (при 20 °C) и температурен коефициент на съпротивлението α за метали и сплави

Вещество	ρ, $\Omega.mm^2/m$	α, K^{-1}	Вещество	ρ, $\Omega.mm^2/m$	α, K^{-1}
Алуминий	0,028	0,0045	Месинг	0,71	0,001
Волфрам	0,050	0,0048	Никелин	0,42	0,0001
Желязо	0,098	0,0065	Нихром	1,10	0,0001
Злато	0,020	0,004	Стомана	0,12	0,006
Мед	0,017	0,001			
Сребро	0,015	0,004			

4. Показател на пречупване

Въздух	1,00029	Диамант	2,42
Вода	1,33	Кварц	1,54
Спирт	1,36	Стъкло (обикновено)	1,50

5. Отделителна работа на метали

Метал	$A_{отд}$, eV	Метал	$A_{отд}$, eV
Волфрам	4,5	Платина	5,29
Калий	2,15	Сребро	4,28
Литий	2,39	Цезий	1,89
Натрий	2,27	Цинк	3,74

6. Периодична таблица на химичните елементи

	I A	II A	III Б	IV Б	V Б	VI Б	VII Б	----	VIII Б	----	I Б	II Б	III A	IV A	V A	VI A	VII A	VIII A
1	1 H 1,1																	2 He 4,0
2	3 Li 7,0	4 Be 9,0											5 B 10,8	6 C 12,0	7 N 14,0	8 O 16,0	9 F 19,0	10 Ne 20,0
3	11 Na 23,0	12 Mg 24,3											13 Al 27,0	14 Si 28,0	15 P 31,0	16 S 32,0	17 Cl 35,5	18 Ar 40,0
4	19 K 39,0	20 Ca 40,0	21 Sc 45,0	22 Ti 48,0	23 V 51,0	24 Cr 52,0	25 Mn 55,0	26 Fe 56,0	27 Co 59,0	28 Ni 58,7	29 Cu 63,5	30 Zn 65,4	31 Ga 69,7	32 Ge 72,6	33 As 75,0	34 Se 79,0	35 Br 80,0	36 Kr 84,0
5	37 Rb 85,5	38 Sr 87,6	39 Y 89,0	40 Zr 91,2	41 Nb 93,0	42 Mo 96,0	43 Tc (97)	44 Ru 101	45 Rh 103	46 Pd 106	47 Ag 108	48 Cd 112	49 In 115	50 Sn 119	51 Sb 122	52 Te 128,0	53 I 127	54 Xe 131
6	55 Cs 13,3	56 Ba 137	57 La 138,9	72 Hf 178	73 Ta 181	74 W 184	75 Re 186	76 Os 190	77 Ir 192	78 Pt 195	79 Ar 197	80 Hg 201	81 Ti 204	82 Pb 207	83 Bi 209	84 Po (210)	85 At (210)	86 Rn (222)
7	87 Fr (223)	88 Ra 226	89 Ac (227)	104 Rf	105 Db	106 Sb	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 xxx	111 xxx	112 xxx						

Лантаноиди	58 Ce 140	59 Pr 141	60 Nd 140	61 Pm (147)	62 Sm 150	63 Eu 152	64 Gd 157	65 Tb 159	66 Dy 162	67 Ho 165	68 Er 167	69 Tm 169	70 Yb 173	71 Lu 175
Актиноиди	90 Th 232	91 Pa 231	92 U 238	93 Np 237	94 Pu (244)	95 Am (243)	96 Cm (247)	97 Bk (251)	98 Cf (251)	99 Es (254)	100 Fm (257)	101 Md (258)	102 No (255)	103 Lr (256)

Ред на електроотрицателността

Cs, Li, Ba, Na, Ca, Mg, Ag, Al, Fe, Zn, Si, Cu, Ni, P, H, I, S, C, Br, Cl, N, O, F

доц. д-р Димитър Йорданов Мърваков
гл. ас. д-р Виктор Генчев Иванов

СБОРНИК ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКА ЗА 9.–10. КЛАС

Рецензент *Соня Григорова*
Редактор *Лилия Гочева*
Художник на корицата *„Студио К-дизайн" ЕТ*
Графичен дизайн *Тотко Кьосемарлиев*
Художник редактор *Веселин Цаков*
Технически редактор *Йорданка Иванова*
Коректор *Мила Томанова-Димитрова*

ISBN 954–01–1805–0

Българска. Издание I. Формат 70x100/16. Печ. коли 16. Изд. коли 20,74.
Код 20910301778.

Издателство *„Просвета – София"* АД – София 1618, ул. „Земеделска" 2
www.prosveta.net

Печат *„Инвестпрес"* АД – София

СБОРНИК ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКА

9.–10. клас

ДИМИТЪР МЪРВАКОВ / ВИКТОР ИВАНОВ

Сборникът е написан в съответствие с действащите учебни програми по физика и астрономия за 9. клас (задължителна и профилирана подготовка) и 10. клас (задължителна подготовка). Той включва задачи от ядрата на учебно съдържание „Електричество и магнетизъм“, „Трептения и вълни“, „Светлина“ и „Механика“. Нивото на задачите е подбрано така, че сборникът да подпомага учениците при по-задълбоченото овладяване на материала.

Организацията на отделните тематични единици има за цел да даде възможност на учениците сами или с помощта на своя учител да се научат как трябва да подхождат при решаването на даден физичен проблем, какви математични средства да прилагат при решаването му, как да представят получените от тях резултати, какви изводи и обобщения могат да направят, за да изградят своята физична интуиция.

Сборникът има приложения, включващи основните физични константи, а така също и стойностите на различни физични характеристики. Той може да се използва в съчетание с всеки одобрен от МОН учебник за 9. и 10. клас и е незаменимо помагало не само за ЗП, ПП, но и за ЗИП.

ISBN 954-01-1805-0

9789540118055

Цена 7,00 лв.